ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №3, 2001 Механика

УДК 539.3

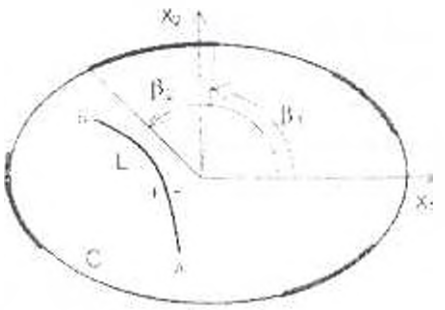
ВОЗБУЖДЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ С ТУННЕЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

Бардзокас Д.И., Фильштинский М.А.

Դ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլշտինսկի
Սիքլանցիկ ճաքով պյեզոկերամիկական գլանում սահքային ալիքների զրգռումը մակերևույթային էլեկտրոդների կամայական համակարգով
Աշխատանքում ստացված են միջանցիկ ճաքով պյեզոկերամիկական գլանի համար, որի մակերևույթի վրա կան էլեկտրոդներ, էլեկտրաառաձգականության հավասարությունների դինամիկական խնդրի սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը և ուսումնասիրված են սահքային ալիքները

D. I. Bardzokas, M.L. Filshtinsky
Excitation of Shear Waves in Piezoceramic Cylinder with Tunnel Crack by an Arbitrary System of Surface Electrodes

В работе получена система сингулярных интегродифференциальных уравнений антиплоской динамической задачи электроупругости для пьезокерамического цилиндра, на поверхности которого имеются электроды с туннельной трещиной и изучены сдвиговые волны



Фиг.1

Методы решения смешаных задач теории упругости развиты в [1]. Ниже получена система сингулярных интегродифференциальных уравнений антиплоской динамической задачи электроупругости для частично-электродированного цилиндра с туннельной трещиной при электрическом возбуждении сопряженных полей.

Рассмотрим отнесенный к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ бесконечный в направлении оси симметрии материала x_3 пьезокерамический цилиндр, содержащий туннельную криволинейную трещину L (фиг.1). На свободной от напряжений поверхности цилиндра располагаются $2n$ бесконечно длинных в направлении оси x_3 тонких электродов с заданными разностями электрического потенциала, а неэлектродированные участки поверхности сопряжены с вакуумом (воздухом). Границы k-го электрода определены величинами β_{2k-1} и $\beta_{2k}\left(k=\overline{1,2n}\right)$, электрический потенциал на нем задан величиной $\phi_k^* = \mathrm{Re}\left(\Phi_k^* e^{-i\omega t}\right)$ (ω – круговая частота, t – время). Предполагается, что кривизны контуров L и C являются функциями класса Гельдера [2], а электроды – идеально проводящие и абсолютно гибкие

В условиях обратного пьезоэлектрического эффекта в кусочно-однородном цилиндре имеет место электроупругое поле, соответствующее состоянию антиплоской деформации. Полная система уравнений в квазистатическом приближении сводится к дифференциальным уравнениям относительно сдвигового перемещения u_3 и электрического потенциала ϕ [3]

$$c_{44}^{E}\nabla^2 u_3 + e_{15}\nabla^2\phi = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$
$$e_{15}\nabla^2 u_3 - э_{11}^{\varepsilon}\nabla^2\phi = 0 \qquad (1)$$

Здесь c_{44}^{E}, e_{15} и $э_{11}^{\varepsilon}$ – модуль сдвига, измеренный при постоянном значении электрического поля, пьезоэлектрическая константа и диэлектрическая проницаемость, измеренная при фиксированных деформациях, соответственно, ρ – массовая плотность материала.

Из (1) следуют соотношения для амплитудных значений искомых функций

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0,\ \nabla^2 F = 0$$
$$\Phi = \frac{e_{15}}{э_{11}^{\varepsilon}}U_3 + F,\quad \gamma = \frac{\omega}{c},\quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^{E}\left(1+k_{15}^2\right)}{\rho}},\quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^{E}\,э_{11}^{\varepsilon}}} \qquad (2)$$
$$u_3 = \mathrm{Re}\left(U_3 e^{-i\omega t}\right),\ \phi = \mathrm{Re}\left(\Phi e^{-i\omega t}\right)$$

где c – скорость волны сдвига в пьезокерамической среде, k_{15} – коэффициент электромеханической связи.

Амплитуды механических и электрических величин можно выразить через функции U_3 и F по формулам [4]

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2\frac{\partial}{\partial z}\left[c_{44}^{E}\left(1+k_{15}^2\right)U_3 + e_{15}F\right] \qquad (3)$$
$$D_1 - iD_2 = -2\,э_{11}^{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial z},\quad E_1 - iE_2 = -2\frac{\partial}{\partial z}\left(F + \frac{e_{15}}{э_{11}^{\varepsilon}}U_3\right),\quad z = x_1 + ix_2$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, D_i и E_i – компоненты векторов индукции и напряженности электрического поля соответственно.

Электрические граничные условия на трещине имеют вид [3]

$$E_s^{+} = E_s^{-},\ D_n^{+} = D_n^{-} \qquad (4)$$

Здесь E_s и D_n – касательная компонента вектора электрической напряженности и нормальная компонента вектора электрической индукции соответственно; знаки "плюс" и "минус" относятся к левому и правому берегам L при движении от его начала a к концу b (фиг.1).

Граничные условия на поверхностях цилиндра и свободной от усилий трещины представимы в форме [4]

$$\frac{\partial}{\partial n}\left\{c_{44}^{E}\left(1+k_{15}^2\right)U_3 + e_{15}F\right\} = 0 \text{ на } C \qquad (5)$$

$$F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^c} U_3 = \Phi^*(\zeta^*), \ \zeta^* \in C_\phi$$

$$D_n = -\varepsilon_{11}^c \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad C \setminus C_\phi$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left\{c_{44}^E\left(1 + k_{15}^2\right)U_3 + e_{15}F\right\}^+ = 0 \quad \text{на} \quad L$$

где C_ϕ – часть контура, соответствующая электродированной поверхности цилиндра; оператор $\partial / \partial n$ обозначает производную по нормали к граничному контуру.

Следуя [4], представим искомые функции в виде

$$U_3(z) = \int_C p(\zeta^*) H_0^{(1)}(\gamma r_1) ds - \frac{i}{4} \int_L [U_3] \frac{\partial H_0^{(1)}(\gamma r)}{\partial n_\zeta} ds$$

$$F(z) = \int_C f(\zeta^*) \frac{\partial}{\partial n_{\zeta^*}} \ln r_1 ds + \frac{e_{15}}{2\pi \varepsilon_{11}^c} \int_L \left[\frac{dU_3}{ds}\right] \arg(z - \zeta) ds \qquad (6)$$

$$r = |z - \zeta|, \ r_1 = |\zeta^* - z|, \ \zeta \in L, \ \zeta^* \in C$$

Здесь $H_\nu^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода порядка ν, ds – элемент длины дуги контура, по которому производится интегрирование; символ $[\cdot]$ обозначает скачок соответствующей величины на L.

Интегральные представления (6) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2), обеспечивают существование скачка перемещения и непрерывность вектора напряжения на L, а также автоматическое выполнение электрических условий (4).

Подставляя предельные значения функций (6) и их производных при $z \to \zeta_0 \in L$ и $z \to \zeta_0^* \in C$ в граничные условия (5), приходим к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода

$$-2\pi p(\zeta_0^*) + \int_C p(\zeta^*) g_1(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_C f(\zeta^*) g_2(\zeta^*, \zeta_0^*) ds +$$

$$+ \int_L \left[\frac{dU_3}{ds}\right] g_3(\zeta, \zeta_0^*) ds + \int_L [U_3] g_4(\zeta, \zeta_0^*) ds = 0 \qquad (7)$$

$$\pi f(\zeta_0^*) + \int_C p(\zeta^*) g_5(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_C f(\zeta^*) g_6(\zeta^*, \zeta_0^*) ds +$$

$$+ \int_L \left[\frac{dU_3}{ds}\right] g_7(\zeta, \zeta_0^*) ds + \int_L [U_3] g_8(\zeta, \zeta_0^*) ds = \Phi^*(\zeta_0^*), \ \zeta_0^* \in C_\phi$$

$$\int_C f'(\zeta^*) g_9(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_L \left[\frac{dU_3}{ds}\right] g_{10}(\zeta, \zeta_0^*) ds = 0, \ \zeta_0^* \in C \setminus C_\phi$$

$$\int_C p(\zeta^*) g_{11}(\zeta^*, \zeta_0) ds + \int_C f'(\zeta^*) g_{12}(\zeta^*, \zeta_0) ds + \int_L \left[\frac{dU_3}{ds}\right] g_{13}(\zeta, \zeta_0) ds +$$

$$+\int_L [U_3] g_{14}(\zeta,\zeta_0)\,ds = 0$$

$$g_1(\zeta^*,\zeta_0^*) = \frac{2}{\pi i}\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^*-\zeta_0^*} + \gamma H_1(\gamma r_{10})\cos(\psi_{10}-\alpha_{10})$$

$$g_2(\zeta^*,\zeta_0^*) = \frac{e_{15}}{c_{44}^E(1+k_{15}^2)}\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^*-\zeta_0^*},\quad g_3(\zeta,\zeta_0^*) = \frac{1}{2\pi(1+k_{15}^2)}\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta-\zeta_0^*}$$

$$g_4(\zeta,\zeta_0^*) = \frac{i\gamma^2}{8}\left[H_2(\gamma r_{20})\cos(\psi+\psi_{10}-2\alpha_{20}) - H_0^{(1)}(\gamma r_{20})\cos(\psi-\psi_{10})\right]$$

$$g_5(\zeta^*,\zeta_0^*) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^\varepsilon} H_0^{(1)}(\gamma r_{10}),\quad g_6(\zeta^*,\zeta_0^*) = \mathrm{Re}\,\frac{e^{i\psi_1}}{\zeta^*-\zeta_0^*}$$

$$g_7(\zeta,\zeta_0^*) = \frac{e_{15}}{2\pi\,\varepsilon_{11}^\varepsilon}\alpha_{20},\quad g_8(\zeta,\zeta_0^*) = -\frac{ie_{15}}{4\,\varepsilon_{11}^\varepsilon}\gamma H_1^{(1)}(\gamma r_{20})\cos(\psi-\alpha_{20})$$

$$g_9(\zeta^*,\zeta_0^*) = \mathrm{Im}\,\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^*-\zeta_0^*},\quad g_{10}(\zeta,\zeta_0^*) = -\frac{e_{15}}{2\pi\,\varepsilon_{11}^\varepsilon}\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta-\zeta_0^*}$$

$$g_{11}(\zeta^*,\zeta_0^*) = \frac{2}{\pi i}\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\psi_{30}}}{\zeta^*-\zeta_0} + \gamma H_1(\gamma r_{30})\cos(\psi_0-\alpha_{30})$$

$$g_{12}(\zeta^*,\zeta_0) = \frac{e_{15}}{c_{44}^E(1+k_{15}^2)}\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\psi_{30}}}{\zeta^*-\zeta_0},\quad g_{13}(\zeta,\zeta_0) = \frac{1}{2\pi(1+k_{15}^2)}\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\psi_{30}}}{\zeta-\zeta_0}$$

$$g_{14}(\zeta,\zeta_0) = \frac{i\gamma^2}{8}\left[H_2(\gamma r_0)\cos(\psi+\psi_0-2\alpha_0) - H_0^{(1)}(\gamma r_0)\cos(\psi-\psi_0)\right]$$

$$H_1(x) = \frac{2i}{\pi x} + H_1^{(1)}(x),\quad H_2(x) = \frac{4i}{\pi x^2} + H_2^{(1)}(x)$$

$$r_0 = |\zeta_0-\zeta|,\ \alpha_0 = \arg(\zeta_0-\zeta),\ r_{10} = |\zeta^*-\zeta_0^*|,\ \alpha_{10} = \arg(\zeta^*-\zeta_0^*)$$

$$r_{20} = |\zeta_0^*-\zeta|,\ \alpha_{20} = \arg(\zeta_0^*-\zeta),\ r_{30} = |\zeta^*-\zeta_0|,\ \alpha_{30} = \arg(\zeta^*-\zeta_0)$$

$$\psi = \psi(\zeta),\ \psi_1 = \psi(\zeta^*),\ \psi_0 = \psi(\zeta_0),\ \psi_{10} = \psi(\zeta_0^*),\ \zeta,\zeta_0 \in L,\ \zeta^*,\zeta_0^* \in C$$

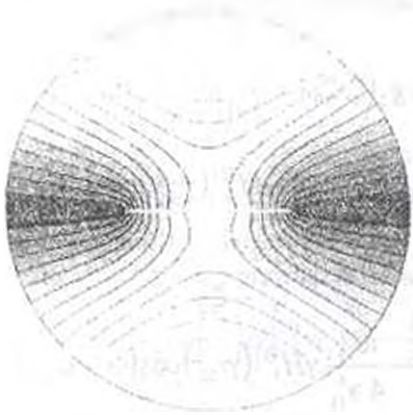
Здесь ψ и ψ_1 – углы между нормалями к контурам L и C и осью Ox_1 соответственно; $\Phi(\zeta_0^*)$ – кусочно-постоянная функция, задающая значения амплитуд электрических потенциалов на электродах.

Для однозначной разрешимости системы (7) в классе функций с производными, неограниченными вблизи концов трещины L [2, 5], ее необходимо рассматривать в совокупности с дополнительным условием

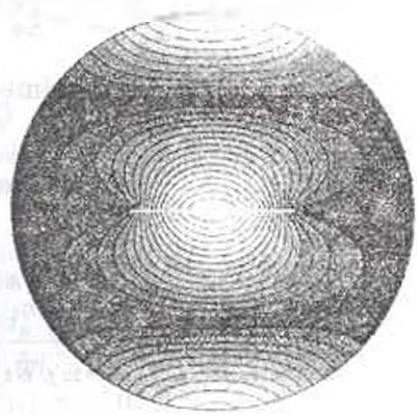
$$\int_L \left[\frac{dU_3}{ds}\right] ds = 0 \qquad (8)$$

В качестве примера рассмотрим колебания крутового радиуса R из пьезокерамики $PZT-4$ с прямолинейной трещиной, возбуждаемые

вследствие заданной на двух электродах разности амплитуд электрических потенциалов $2\Phi^*$. Решение системы интегродифференциальных уравнений (7) совместно с (8) для этого случая проводилось по специальной схеме метода квадратур [4].



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг.2 и 3 соответственно представлены линии уровня модуля амплитуды перемещения $|U_3|$ в кусочно-однородном цилиндре в окрестности первой и второй собственной частоты колебаний ($\gamma^{(1)}R \approx 1.17,\ \gamma^{(2)}R \approx 3.15$) при $\beta_1 = 5\pi/14,\ \beta_2 = 9\pi/14,\ \beta_3 = 19\pi/14,$ $\beta_4 = 23\pi/14,\ l/R = 0.4$ ($2l$ – длина трещины). Наиболее светлые зоны отвечают максимальным значениям исследуемой величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
4. Бардзокас Д.И., Фильштинский М.А. Электроупругость кусочно-однородных тел. Сумы: Университетская книга, 2000. 308 с.
5. Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Интегральные уравнения в теории упругости. СПб.: Изд-во СПбУ, 1994. 271 с.

Национальный технический университет Афины
Сумский государственный университет

Поступила в редакцию
25.06.2001