

УДК 539.3

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ
КЛИНА С ЗАЦЕМЛЁННЫМИ КРАЯМИ

Геворгян Г.В., Задоян М.А.

В работе исследуются местные поля напряжений и деформаций в окрестности угловой точки зашпеленного упрочняемого многоклина при продольном сдвиге. Полученные системы трансцендентных уравнений дают возможность вычислительными методами получить характерный для описания состояния параметр λ , зависящий от физических и геометрических параметров составляющих клиньев. При обратной постановке получаются поверхности конечно-напряженных состояний в пространстве геометрических и физических многообразий конструкции многоклина, отделяющие мало-напряженные состояния от концентранных.

Գ. Վ. Գևորգյան, Մ.Ա. Զադոյան

Անրակցված եզրերով բաշխարյալ ամրապնդվող սեպը երկայնական սաեքերի դեպքում

Աստիճանային օրենքով ամրապնդվող բաղադրիչներով ամրակցված եզրերով սեպի անկյունային կետի շրջակայքում ուսումնասիրվում է տեղայնական լարումների դաշտը: Ատապվում է սրանսենդենտ հավասարումների համակարգ, որից որոշվում է լարումների դաշտը օրնորագրող λ պարամետրը կախված բաղադրիչների երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերից:

G.V. Gevorgyan, M.A. Zadoyan

The Strength of the Multi-Wedge with Fastened Boundaries under the Longitudinal Shear

Постановка задачи и исходные уравнения

Рассматривается напряженное состояние при продольном сдвиге в окрестности угловой точки составного тела, изготовленного из клиновидных и призм, материалы которых упрочняются по степенному закону:

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m$$

где σ_0 и ε_0 — интенсивности напряжений и деформаций, параметр m для всех материалов считается одинаковым, а модуль деформации k — различным. Внешние края клина заделаны, т.е. предполагается, что в окрестности угловой точки продольные перемещения равны нулю: $w = 0$. Углы при вершинах составляющих клиньев обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, причём принимается

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad A_0 = 0 \quad (\text{фиг.1}).$$

В каждом i -ом составляющем клине имеем уравнение равновесия:

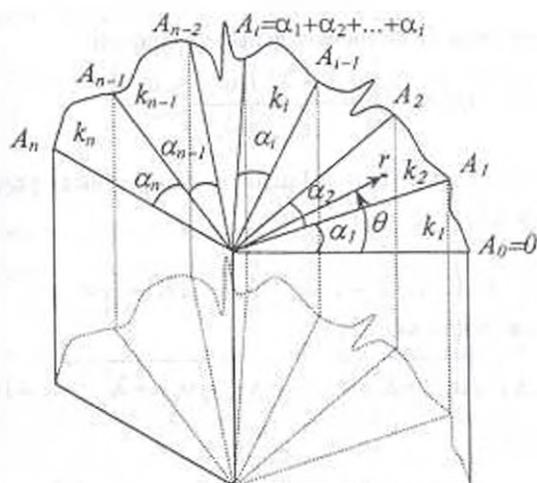
$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta \theta}}{r} = 0 \quad (1)$$

соотношения между компонентами напряжения и деформации, между деформациями и перемещениями будут:

$$\begin{aligned} \tau_n &= 2k_i \varepsilon_0^{m-1} \gamma_n, & \tau_\theta &= 2k_i \varepsilon_0^{m-1} \gamma_\theta, \\ 2\gamma_n &= \frac{\partial w_i}{\partial r}, & 2\gamma_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

Интенсивности напряжения и деформации выражаются:

$$\sigma_{0i} = \sqrt{\tau_{\theta i}^2 + \tau_{r i}^2}, \quad \varepsilon_{0i} = \sqrt{\left(\frac{\partial w_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta}\right)^2}$$



Фиг. 1.

Представление решения

В каждом i -ом клине решение представим в следующем виде:

$$\tau_n = \lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, \quad \tau_\theta = k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i,$$

$$w_i = r^\lambda f_i, \quad \chi_i = \left(\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2} \right)^{m-1}$$

причём $i=1, 2, \dots, n$, а $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ и λ — неизвестные функции и параметр, играющие роль собственной функции и собственного значения.

Подставляя эти решения для компонентов напряжений (2) в уравнения (1), приходим к системе уравнений:

$$(f_i' \chi_i) + \eta f_i \chi_i = 0, \quad \eta = \lambda[1 + (\lambda - 1)m] \quad (3)$$

где $i=1, 2, \dots, n$.

Для защемлённых краёв будем иметь условия:

$$f_i(0, \lambda) = f_i(A_n, \lambda) = 0 \quad (4)$$

На контактных поверхностях имеем условия непрерывности напряжений τ_θ и w_i :

$$\begin{aligned}
 f_i' \chi_i &= \delta_i f_{i+1}' \chi_{i+1}, \\
 f_i &= f_{i+1}, \quad \text{при } \vartheta = A_i, \\
 \delta_i &= \frac{k_{i+1}}{k_i},
 \end{aligned} \tag{5}$$

причём $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Вводя функцию $\psi_i(\vartheta, \lambda)$ -

$$f_i' = f_i \psi_i, \tag{6}$$

из (3) приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\psi_i' = - \frac{(\psi_i^2 + \lambda^2)(\psi_i^2 + \omega^2)}{\psi_i^2 + \lambda^2 p} \tag{7}$$

где $\omega^2 = \lambda(\lambda + p - 1)$, $p = 1/m$. Гранично-контактные условия для системы уравнений (7) являются на:

внешних краях -

$$\psi_1(0, \lambda) = \infty, \quad \psi_n(A_n, \lambda) = -\infty \tag{8}$$

контактных поверхностях из (5) -

$$\mu_i \left(\sqrt{\mu_i^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} - \delta_i v_i \left(\sqrt{v_i^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} = 0 \tag{9}$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$ и -

$$\mu_i = \psi_i(A_i, \lambda), \quad v_i = \psi_{i+1}(A_i, \lambda)$$

Решения уравнений (7) представляются в следующей форме:

$$\arctg \frac{\psi_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \arctg \frac{\psi_i}{\omega} = H_i - \vartheta \tag{10}$$

где H_i - произвольные постоянные, $i = 1, 2, \dots, n$.

Используя условия (8), находим:

$$H_1 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right), \quad H_n = A_n - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right).$$

Таким образом, для крайних составляющих клиньев будем иметь:

$$\arctg \frac{\psi_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \arctg \frac{\psi_i}{\omega} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \vartheta, \quad 0 \leq \vartheta \leq A_1 = \alpha_1 \tag{11}$$

$$\arctg \frac{\psi_n}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \arctg \frac{\psi_n}{\omega} = A_n - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \vartheta, \quad A_{n-1} \leq \vartheta \leq A_n \tag{12}$$

Остальные постоянные H_2, H_3, \dots, H_{n-1} остаются неизвестными. Подставляя в (11) $\vartheta = A_1$ и в (12) $\vartheta = A_{n-1}$, имеем:

$$\begin{aligned}
 \arctg \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \arctg \frac{\mu_i}{\omega} &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \alpha_1, \\
 \arctg \frac{v_{n-1}}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \arctg \frac{v_{n-1}}{\omega} &= \alpha_n - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Далее используя решение (10) для i -го клина, принимая в нём $\vartheta = A_{i-1}$, а затем $\vartheta = A_i$, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\omega} &= H_i - A_i, \\ \operatorname{arctg} \frac{\nu_{i-1}}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\nu_{i-1}}{\omega} &= H_i - A_{i-1} \end{aligned} \quad (14)$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Исключая отсюда H_i , находим:

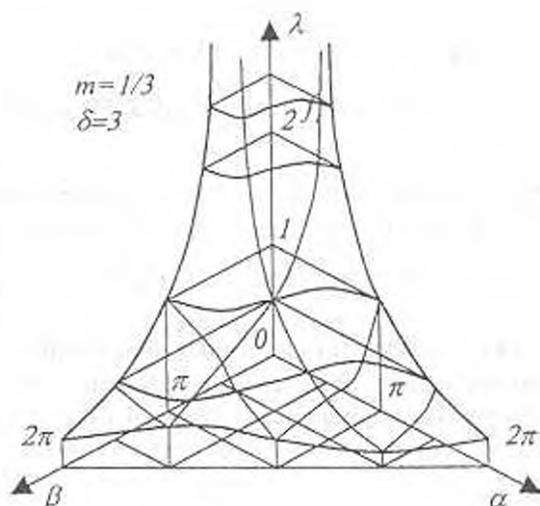
$$\operatorname{arctg} \frac{\nu_{i-1}}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{\nu_{i-1}}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\omega} \right) = \alpha, \quad (15)$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Таким образом, (9), (13) и (15) составляют систему из $2n-1$ уравнений с $2n-1$ неизвестными постоянными $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}, \lambda$. Последний из которых в принципе есть собственное значение, определяемое как:

$$\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, m)$$

Оно в $(2n+1)$ -мерном пространстве геометрических и физических параметров представляет гиперповерхность, определяющая напряженное состояние в окрестности угловой точки рассматриваемого составного клина. На фиг. 2 приведена поверхность $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \delta = 3, m = 1/3)$ для 2-составного клина, построенная вычислительным методом.



Фиг. 2

Определение системы функций f

Интегрируя дифференциальное уравнение (6) для i -го клина находим:

$$f_i = D_i \exp \left(\int_{A_{i-1}}^{\vartheta} \psi_i d\vartheta \right), \quad A_{i-1} \leq \vartheta \leq A_i$$

причём $i = 1, 2, \dots, n$, а D_i – произвольные постоянные.

Далее, используя условия непрерывности на контактных поверхностях, получим:

$$D_i = D_1 \exp \left(\sum_{j=1}^{i-1} \int_{A_{j-1}}^{A_j} \psi_j d\vartheta \right)$$

где $i = 2, 3, \dots, n$. Постоянная $D_i = f_i(0)$ остаётся неизвестным.

Линейно-упругие материалы

Полагая $m = 1$, из (9) получим:

$$\mu_i = \delta_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (16)$$

Далее, из (13) находим:

$$\mu_i = \lambda \operatorname{ctg} \lambda \alpha_i, \quad v_{n-1} = -\lambda \operatorname{ctg} \lambda \alpha_n \quad (17)$$

Полагая в (15) $m = 1$, имеем:

$$\operatorname{arctg} \frac{v_{i-1}}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} = \lambda \alpha_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (18)$$

Вводя новые неизвестные постоянные φ_i –

$$v_{i-1} = \lambda \operatorname{tg} \lambda \varphi_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (19)$$

из (17) получим:

$$\mu_i = \lambda \operatorname{tg} \lambda (\varphi_i - \alpha_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (20)$$

Используя контактные условия (16), для выражений μ_i и v_i получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \lambda \alpha_i - \delta_i \operatorname{tg} \lambda \varphi_i &= 0 \\ \operatorname{tg} \lambda (\varphi_i - \alpha_i) - \delta_i \operatorname{tg} \lambda \varphi_{i+1} &= 0 \\ \operatorname{tg} \lambda (\varphi_{n-1} - \alpha_{n-1}) + \delta_{n-1} \operatorname{ctg} \lambda \alpha_n &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-2$.

Полученная система состоит из $n-1$ трансцендентных уравнений с $n-1$ неизвестными постоянными $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}, \lambda$. Исключив $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}$, в принципе, приходим к уравнению $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1})$.

Гиперповерхность конечных напряжений

Для рассматриваемых упрочняющихся материалов, полагая $\lambda = 1$, условия на контактных поверхностях (9) принимают следующий вид:

$$\mu_i \left(\sqrt{\mu_i^2 + 1} \right)^{m-1} - \delta_i v_i \left(\sqrt{v_i^2 + 1} \right)^{m-1} = 0 \quad (22)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Уравнения (13) при $\lambda = 1$ дают:

$$\mu_i = \operatorname{ctg} \alpha_i, \quad v_{n-1} = -\operatorname{ctg} \alpha_n$$

Соответственно из (15) имеем:

$$\operatorname{arctg} v_{i-1} - \operatorname{arctg} \mu_i = \alpha_i$$

причем $i = 2, 3, \dots, n-1$. Откуда, используя обозначения (19), получим:

$$\mu_i = \operatorname{tg}(\varphi_i - \alpha_i), \quad v_{i-1} = \operatorname{tg} \varphi_i,$$

Тогда система контактных условий (22) преобразуется в следующую форму:

$$\operatorname{ctg} \alpha_i |\sin \alpha_i|^{1-m} - \delta_i \operatorname{tg} \varphi_2 |\cos \varphi_2|^{1-m} = 0$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_i - \alpha_i) |\cos(\varphi_i - \alpha_i)|^{1-m} - \delta_i \operatorname{tg} \varphi_{i-1} |\cos \varphi_{i-1}|^{1-m} = 0 \quad (23)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_{n-1} - \alpha_{n-1}) |\cos(\varphi_{n-1} - \alpha_{n-1})|^{1-m} + \delta_{n-1} \operatorname{ctg} \alpha_n |\sin \alpha_n|^{1-m} = 0$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-2$. Полученная система имеет $n-1$ уравнений с $n-2$ неизвестными постоянными $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}$. Исключив эти постоянные, приходим в $2n$ -мерном пространстве геометрических и физических параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, m$ к гиперповерхности конечных напряжений:

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, m) = 1$$

отделяющую зону малонапряжённости от зоны сильных концентраций напряжений.

Случай трёхсоставного клина

Система уравнений при $n = 3$ будет:

из контактных условий:

$$\mu_i \left(\sqrt{\mu_i^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} - \delta_i v_i \left(\sqrt{v_i^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

причём μ_i и v_i определяются из следующих уравнений:

$$\operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\omega} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \alpha \quad (25)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{v_2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{v_2}{\omega} = \gamma - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right)$$

следующих из (13), полагая в нём $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \gamma$, а также уравнения:

$$\operatorname{arctg} \frac{v_1}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{v_1}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\omega} \right) = \beta \quad (26)$$

следующее из (15), полагая в нём $\alpha_2 = \beta$.

Приведённая система уравнений (24)-(26), содержащая неизвестные постоянные $\mu_1, \mu_2, v_1, v_2, \lambda$, определяет искомый параметр λ -

$$\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2, m)$$

Для однородного клина, т.е. при $\delta_1 = \delta_2 = 1$, полагая в (24) $\mu_i = v_i$, из (25)-(26) получим:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \left(1 + \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + p - 1)}} \right)$$

Обозначая $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi s$, имеем:

$$\lambda = \frac{2 + (p-1)(1-2s)^2 + (1-2s)\sqrt{4p + (p-1)^2(1-2s)^2}}{8s(1-s)}$$

Для однородного клина поверхность малонапряжённости $\lambda = 1$, отделяющая зону конечных напряжений от зоны концентраций напряжений, будет плоскость $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Плоскость отсекает от координатных осей α, β, γ отрезки, равные π .

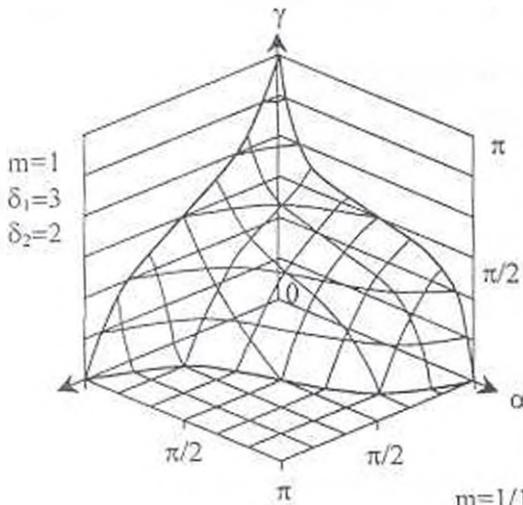
Полагая $\lambda = 1$, из системы уравнения (23) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha |\sin \alpha|^{1-m} - \delta_1 \operatorname{tg} \varphi |\cos \varphi|^{1-m} &= 0 \\ \operatorname{tg}(\varphi - \beta) |\cos(\varphi - \beta)|^{1-m} + \delta_2 \operatorname{ctg} \gamma |\sin \gamma|^{1-m} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

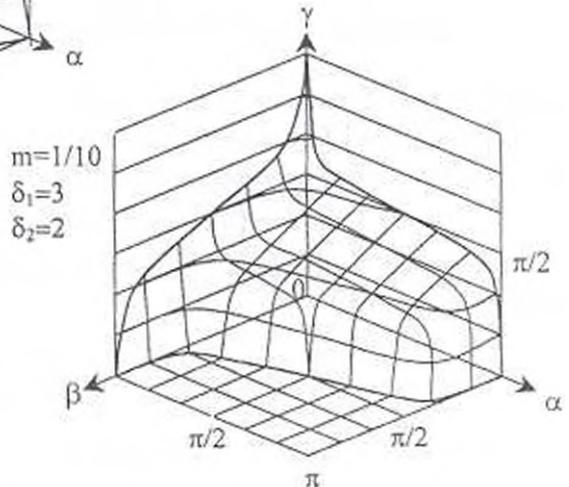
где обозначено $\varphi_2 = \varphi$. Исключив отсюда φ , приходим к уравнению гиперповерхности конечных напряжений, отделяющей зону малонапряженности от зоны концентрации напряжений. На фиг. 3-4 в координатном пространстве $\alpha\beta\gamma$ представлены поверхности конечных напряжений (27) при разных δ_1, δ_2 и m .

Для линейно-упругих материалов, полагая $m = 1$, из (24)-(26) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \lambda \alpha - \delta_1 \operatorname{tg} \lambda \varphi &= 0 \\ \operatorname{tg} \lambda (\varphi - \beta) + \delta_2 \operatorname{ctg} \lambda \gamma &= 0 \end{aligned}$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Далее, исключив из этой системы $\operatorname{tg} \lambda \varphi$, получим трансцендентное уравнение относительно λ –

$$\operatorname{ctg} \lambda \alpha \operatorname{ctg} \lambda \beta + \delta_2 \operatorname{ctg} \lambda \alpha \operatorname{ctg} \lambda \gamma + \delta_1 \delta_2 \operatorname{ctg} \lambda \beta \operatorname{ctg} \lambda \gamma - \delta_1 = 0$$

В частном случае, когда $\alpha = \beta = \gamma$, находим:

$$\operatorname{tg}^2 \lambda \alpha = \frac{1}{\delta_1} (1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2)$$

или же

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \delta_1 \delta_2 + \delta_2}{\delta_1}} \quad (28)$$

При $\delta_1 \rightarrow \infty$, т.е. когда материал второго клина (β) слишком сильный, чем материал первого клина (α), получим:

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \sqrt{\delta_2}$$

Далее, если материал третьего клина (γ) слишком сильный, чем материал второго клина (β), то принимая $\delta_2 \rightarrow \infty$, находим $\lambda = \frac{\pi}{2\alpha}$.

Полагая в (28) $\lambda = 1$, получим предельное значение угла:

$$\alpha_* = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \delta_1 \delta_2 + \delta_2}{\delta_1}}$$

обеспечивающее малонапряжённое состояние в окрестности угловой точки рассматриваемого составного клина. В случае полубесконечной щели в (28) следует положить $\alpha = 2\pi/3$.

Проблема малонапряжённости для случая двух составляющих линейно-упругих разнородных клиньев впервые исследована в [1]. В случае нелинейно-упрочняющихся материалов такие задачи рассмотрены в [2-4].

Литература

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1987. 338с.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384с.
3. Геворгян Г.В., Задоян М.А. Малонапряжённость многоклинна при смешанных краевых условиях. Информационные Технологии и Управление, 4 // Мат. междунар. конф. «Прикл. и Математ. аспекты Естествознания», «Ноябрь-Табан», Ереван, 1999. 195с.
4. Задоян М.А. Условие малонапряжённости составного клина из нелинейно-упругих материалов // ПИММ. 2000 Вып. 3. С.444-453.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.03.2001