

УДК 539.3

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Мовсисян А.А.

L. U. Movsisyan

Ջերմաստիճանական սալում ոչ գծային ալիքների մասին

Դիտարկվում է երկրաչափորեն ոչ գծային ջերմաստիճանական սալում (կապակցված խնդիր) ալիքների տարածման խնդիրը: Ցույց է տրվում կտրուկ ուժի ոչ գծային անդամի և ջերմության ալիքային բաղադրանքի ալիքների տարածման կայունության պայմանով:

L.A. Movsisyan

On Non-Linear Waves in Thermoelastic Plate

Обычно при изучении геометрически нелинейных колебаний пластин инерционным членом от продольного перемещения по известным соображениям пренебрегают [1].

При изучении распространения волн модуляции в пластине [2] оказалось, что сохранение этого члена существенно меняет ее картину, т.е. если без учета этого члена движение волнового пакета устойчиво ("жесткая" характеристика), то уже наличие — неустойчиво ("мягкая" характеристика).

В настоящей работе исследуется распространение одномерных нелинейных волн в термоупругой пластине (связанная задача). В отличие от [1, 2] в уравнениях движения сохраняется нелинейный член от перерезывающего усилия [3, 4]. Выявляется роль этого члена и температуры в вопросе устойчивости распространения волн модуляции.

1. Уравнения одномерного движения пластинки берем в виде [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = N \end{aligned} \quad (1.1)$$

В [1] в первом уравнении второй член отсутствует, однако, как показано в [3], имеются задачи устойчивости, в которых роль этого члена существенна. Оказывается, и в настоящей задаче наличие этого члена приводит не только к количественным изменениям в условии устойчивости распространения волн.

В предположении линейного изменения температуры по толщине пластинки $\theta = \theta_0 + z\theta_1$ и справедливости гипотезы прямых нормалей для усилия T и момента M имеем:

$$\begin{aligned} T &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha(1+\nu)\theta_0 \right] \\ M &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha(1+\nu)\theta_1 \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

и два уравнения теплопроводности [5,6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_0}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + A \theta_0 + \chi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + B \theta_1 - \chi \eta \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} &= 0 \\ A = \frac{2s}{\rho h c_p}, \quad B = \frac{12\chi}{h^2} + \frac{6s}{\rho h c_p} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность материала, $\chi = \lambda_0 / \rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, λ_0 — коэффициент теплопроводности, s — коэффициент теплопередачи поверхности тела, $\eta = \gamma T^0 / \lambda_0$ — коэффициент связанности, $\gamma = E\alpha / (1 - 2\nu)$, T^0 — температура недеформированного тела.

На основании (1.1) и (1.2) уравнения движения в перемещениях будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha(1 + \nu) \theta_0 \right] + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha(1 + \nu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} &= \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + \alpha(1 + \nu) \theta_1 \right] - \frac{12}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha(1 + \nu) \theta_0 \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + \\ + \frac{12}{h^2 \nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\nu = [E / \rho(1 - \nu^2)]^{1/2}$ — скорость упругой волны в пластине.

2. Решение системы (1.3)-(1.4) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= T_0 + T_2 e^{2i\tau} + \bar{T}_2 e^{-2i\tau}, \quad \theta_1 = T_1 e^{i\tau} + \bar{T}_1 e^{-i\tau} \\ u &= u_0 + u_1 e^{2i\tau} + \bar{u}_1 e^{-2i\tau}, \quad w = w_1 e^{i\tau} + \bar{w}_1 e^{-i\tau}, \quad \tau = kx - \omega t \end{aligned} \quad (2.1)$$

где T_0, u_0 — так называемое "среднее течение" [7], а черточками обозначены сопряженные величины.

При исследовании задачи распространения волн в рассматриваемой системе основной считается изгибная величина.

При подставлении (2.1) в (1.3)-(1.4) и приравнивании коэффициентов при одинаковых гармониках полученная система дает для первых членов (2.1)

$$T_1 \approx -\frac{\chi \eta c}{A} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx -k^2 w_1 \bar{w}_1 e^{2i\tau} / (1 + k^2 h^2 / 6) \quad (2.2)$$

При получении (2.2) принималось, что $\partial / \partial t \sim c \partial / \partial x$, где

$c = d(\operatorname{Re} \omega_0)/dk$ — групповая скорость (от линейной частоты $\omega = \omega'_0 + i\omega''_0$) и высшими степенями при дифференцировании можно пренебречь по сравнению с низшими.

В предположении малости затухания η для линейной частоты принимается

$$\omega'_0 = \frac{h\nu k^2}{2\sqrt{3}}, \quad \omega''_0 = \frac{1}{2B} \alpha(1+\nu)\chi\eta(\omega'_0)^2 \quad (2.3)$$

далее имеем:

$$T_2 \approx -\frac{4}{A} \chi\eta k \omega u_2, \quad T_1 \approx \frac{1}{B} i\chi\eta k^2 \omega w_1$$

$$u_2 \approx -\frac{1}{4} i k w_1^2 \left[1 - \frac{h^2 k^2}{12} + \frac{2}{A} i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega'_0 \right]$$

которые для нелинейной частоты дают

$$\omega = \omega'_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2B} i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega'_0 - \frac{1}{8} a^2 k^2 \left[\frac{7}{2} + \alpha(1+\nu)\chi\eta + \frac{1}{A} i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega'_0 \right] \right\} \quad (2.4)$$

Здесь через a^2 обозначено

$$a^2 = 4w_1 \bar{w}_1 e^{2i\omega'_0 t} \quad (2.5)$$

в отличие от предыдущих работ, например [8], наверное по аналогии с линейными колебаниями, целесообразнее экспоненциальный множитель включить в выражение амплитуды. И вот, что интересно. Наличие нового члена в первом уравнении (1.1) в дисперсионном уравнении (2.4) меняло (в нелинейной части, разумеется) значение действительной части: вместо $7/2$ было бы $9/2$ и что более важно, мнимая часть была бы с отрицательным коэффициентом, а это существенно при исследовании на устойчивость распространения.

В случае, когда пластинка изолирована от внешней среды ($s=0$)

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \approx -k^2 w_1 \bar{w}_1 e^{2i\omega'_0 t} \left[1 + k^2 h^2 / 6 - \alpha(1+\nu)\chi\eta \right]$$

$$T_2 \approx -\frac{1}{k} \eta \omega'_0 u_2, \quad T_1 \approx \frac{1}{12} i\eta \omega'_0 h^2 w_1$$

$$u_2 \approx -\frac{1}{4} i k w_1^2 \left[1 - \frac{1}{12} h^2 k^2 + \frac{1}{2k^2} i\alpha(1+\nu)\eta\omega'_0 \right] \quad (2.6)$$

$$\omega''_0 = -\frac{1}{24} \alpha(1+\nu)\eta h^2 \omega'_0$$

$$\omega = \omega'_0 \left\{ 1 - \frac{i\alpha(1+\nu)\eta h^2 \omega'_0}{24} - \frac{a^2 k^2}{8} \left[\frac{7}{2} + \frac{2\alpha(1+\nu)\chi\eta}{3} + \frac{i\alpha(1+\nu)\eta\omega'_0}{4} \right] \right\} \quad (2.7)$$

3 Следующий вопрос по важности в задачах распространения волн — условие устойчивости волн модуляции. Без учета уравнений теплопроводности, как показано в [2], имеется неустойчивость. Но так как наличие температуры приводит в дисперсионном уравнении к мнимым частям (внутреннее затухание), они не меняют знак в зависимости от k и в обоих случаях они отрицательные ($\omega''_0 < 0$), то такой процесс по [9] является устойчивым.

Однако можно поступить и как в [8]. Если составить уравнение модуляции

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{2} i \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} - (D_1 - i D_2) \Psi |\Psi|^2 = 0, \quad |\Psi| = a \quad (3.1)$$

где ω_0 определяется по (2.3) и (2.6), а коэффициенты

$$D_1 = -7k^2/16, \quad D_2 = \begin{cases} -2\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega'_0/A \\ -\alpha(1+\nu)\eta\omega'_0/4 \end{cases} \quad (3.2)$$

то условие устойчивости (неустойчивости) по [8].

По [8] условие устойчивости волн модуляции есть

$$\Omega'' < 0, \quad \Omega = \Omega' + i\Omega'' \quad (3.3)$$

где частота определяется из следующего уравнения

$$-i\Omega + iK \frac{d\omega'_0}{dk} = \frac{3}{2} D_1 \psi_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2} D_1 \psi_0^2\right)^2 - \Delta} \quad (3.4)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega'_0}{dk^2} K^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \omega'_0}{dk^2} + 2D_1 \psi_0^2 \right)$$

Здесь ψ_0 — начальная амплитуда, K — волновое число огибающего.

Из (3.2) видно, что выражения D_1 и D_2 отрицательные, следовательно, Δ может менять знак и в связи с этим, при $\Delta < \frac{3}{2} (D_1 \psi_0^2)^2$

будем иметь устойчивость, а при $\Delta > (3D_1 \psi_0^2/2)^2$ возможна неустойчивость.

Как указывалось ранее, учет инерционного члена от κ меняет знак D_1 , а учет нелинейного члена в первом уравнении (1.1) меняет знак D_2 , следовательно, в этих случаях возможны другие условия устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. О дисперсионных уравнениях гибких пластин и цилиндрической оболочки // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1988. Т.41. № 3. С.3-6.
3. Мовсисян Л.А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки // Докл. АН Арм.ССР. 1971. Т.52. № 2. С.70-76.
4. Гиуни В.Ц. Об уравнениях гибких пластин и оболочек // Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С.186-189.
5. Болотин В.В. Уравнение нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // ПММ. 1960. Т.24. Вып. 2. С.361-363.
6. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
7. Унзеб Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Модуляция термомангнитоупругих волн в нелинейной пластине // Изв.НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. № 1. С.25-30.
9. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
13.04.2000