

перемещения

$$u_j(r, \varphi, z = h) = u_j^*(r, \varphi) \quad j = r, \varphi, z \quad (1.3)$$

или их соответствующие комбинации

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad \sigma_{rz}(r, \varphi, z = h) &= \sigma_{rz}^*(r, \varphi) \quad j = r, \varphi \\ u_z(r, \varphi, z = h) &= u_z^*(r, \varphi) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \quad \sigma_{zz}(r, \varphi, z = h) &= \sigma_{zz}^*(r, \varphi) \\ u_j(r, \varphi, z = h) &= u_j^*(r, \varphi) \quad j = r, \varphi \end{aligned} \quad (1.5)$$

Условия на боковой поверхности пластины пока не будем конкретизировать. Требуется определить напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины.

Для решения поставленных краевых задач в уравнениях равновесия и соотношениях упругости цилиндрического тела с учетом влияния температурного поля [1] перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\begin{aligned} \xi = r/R, \quad \eta = \varphi, \quad \zeta = z/h = z\varepsilon^{-1}/r, \quad \varepsilon = h/R, \quad u = u_r/R \\ v = u_\varphi/R, \quad w = u_z/R \end{aligned} \quad (1.6)$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\xi} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + RF_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \zeta} + \frac{2\sigma_{rz}}{\xi} + RF_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_{rr}}{\xi} + RF_z &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] + \alpha\theta \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi} u = \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] + \alpha\theta \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr})] + \alpha\theta \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} v = \frac{1}{G} \sigma_{rz} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{1}{G} \sigma_{rz} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{1}{G} \sigma_{rz} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где E — модуль Юнга, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, θ — температурная функция, F_r, F_φ, F_z — компоненты объемных сил.

Решение системы (1.7) складывается из решения внутренней задачи.

справедливого на некотором удалении от боковой поверхности пластины и из согласованного с ним решения задачи пограничного слоя, которое экспоненциально затухает по мере удаления от боковой поверхности пластины.

Решение внутренней задачи ищем в виде асимптотического разложения [2-4]

$$Q = \varepsilon^{k_s} Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad s = \overline{0, S} \quad (1.8)$$

где $k_s = 0$ для всех перемещений и $k_s = -1$ для всех напряжений, а обозначение $s = \overline{0, S}$ здесь и далее означает, что по повторяющемуся индексу s происходит суммирование по s в пределах $[0, S]$.

Считая, что влияния объемных сил и температурного поля соизмеримы с влиянием поверхностных воздействий, представим их в виде асимптотических рядов

$$F_j = \frac{1}{R} \varepsilon^{j-2} F_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad j = r, \varphi, z \quad s = \overline{0, S}$$

$$\theta = \varepsilon^{j-1} \theta^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad s = \overline{0, S} \quad (1.9)$$

Подставив (1.8), (1.9) в (1.7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в левых и правых частях уравнений, получим непротиворечивую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.8).

Решением этой системы является

$$\sigma_{\mu\nu}^{(s)} = \sigma_{\mu\nu 0}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{\mu\nu}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad j = r, \varphi, z$$

$$\sigma_{rr}^{(s)} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{\alpha\alpha 0}^{(s)} + \frac{1}{1-\nu^2} F_1^{(s)}(r, \varphi; P_1, P_2)$$

$$\sigma_{rr}^{(s)} = G \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \eta} + G \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \xi} - G \frac{\nu^{(s-1)}}{\xi} \quad (1.10)$$

$$u^{(s)} = u_0^{(s)} + \zeta \frac{1}{G} \sigma_{rr 0}^{(s)} + u_1^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (u, v; r, \varphi)$$

$$w^{(s)} = w_0^{(s)}(\xi, \eta) + \zeta \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_{\alpha\alpha 0}^{(s)} + w_1^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

где обозначены

$$\sigma_{rr 0}^{(s)} = - \int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial \sigma_{rr}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{1}{\xi} (\sigma_{rr}^{(s-1)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(s-1)}) + F_r^{(s)} \right] d\zeta$$

$$\sigma_{\varphi\varphi 0}^{(s)} = - \int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{2\sigma_{rr}^{(s-1)}}{\xi} + F_{\varphi}^{(s)} \right] d\zeta$$

$$\sigma_{zz 0}^{(s)} = - \int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial \sigma_{zz}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi} \sigma_{rr}^{(s-1)} + F_z^{(s)} \right] d\zeta$$

$$P_1^{(s)} = E \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + vE \frac{1}{\xi} \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + vE \frac{1}{\xi} u^{(s-1)} + v(1+v)\sigma_{zz}^{(s-1)} - (1+v)E\alpha\theta^{(s)}$$

$$P_2^{(s)} = vE \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + E \frac{1}{\xi} \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + vE \frac{1}{\xi} u^{(s-1)} + v(1+v)\sigma_{zz}^{(s-1)} - (1+v)E\alpha\theta^{(s)} \quad (1.1)$$

$$u_0^{(s)} = - \int_0^{\xi} \left[\frac{1}{G} \sigma_{rz}^{(s)} - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} \right] d\xi, \quad v_0^{(s)} = - \int_0^{\xi} \left[\frac{1}{G} \sigma_{\varphi z}^{(s)} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \eta} \right] d\xi$$

$$w_0^{(s)} = - \int_0^{\xi} \left[\frac{1}{E} \sigma_{zz}^{(s)} - \frac{v}{E(1-v^2)} (P_1^{(s)} + P_2^{(s)}) + \alpha\theta^{(s)} \right] d\xi$$

Решение (1.10) содержит 6 неизвестных функций интегрирования $\sigma_{rz}^{(s)}, \sigma_{\varphi z}^{(s)}, \sigma_{zz}^{(s)}, u_0, v_0, w_0$, которые однозначно определяются из граничных условий на лицевых поверхностях $z = \pm h$.

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим

$$u_0 = u_r^{-s} + \frac{1}{G} \sigma_{rz}^{(s)} - u_*^{(s)} (\zeta = -1) \quad (u, v; r, \varphi)$$

$$w_0 = u_r^{-s} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)G} \sigma_{\varphi z}^{(s)} - w_*^{(s)} (\zeta = -1) \quad (1.12)$$

$$u_j^{z(0)} = u_j^z / R, \quad u_j^{z(s)} = 0 \quad s \neq 0 \quad j = r, \varphi, z$$

А из граничных условий, заданных на $z = h$, определяются $\sigma_{rz}^{(s)}, \sigma_{\varphi z}^{(s)}, \sigma_{zz}^{(s)}$.

Удовлетворив условиям (1.2), получим

$$\sigma_{rz}^{(s)} = \sigma_{rz}^{*(s)} - \sigma_{rz}^{(s)} (\zeta = 1)$$

$$\sigma_{\varphi z}^{*(0)} = \sigma_{\varphi z}^* \varepsilon^{-1}, \quad \sigma_{\varphi z}^{*(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad j = r, \varphi, z \quad (1.13)$$

Таким образом, решение краевой задачи (1.1), (1.2), (1.7) определяется с помощью рекуррентных формул (1.8) - (1.13).

Если на лицевых поверхностях $z = h$ заданы кинематические условия (1.3), получаем

$$\sigma_{rz}^{(s)} = \frac{1}{2} G (u_r^{*(s)} - u_r^{(s)} - u_*^{(s)} (\zeta = 1) + u_*^{(s)} (\zeta = -1)) \quad (r, \varphi, u, v)$$

$$\sigma_{\varphi z}^{(s)} = \frac{G(1-\nu)}{(1-2\nu)} (u_r^{*(s)} - u_r^{(s)} - w_*^{(s)} (\zeta = 1) + w_*^{(s)} (\zeta = -1)) \quad (1.14)$$

следовательно, решение краевой задачи с граничными условиями (1.1), (1.3) представится с помощью рекуррентных формул (1.8) - (1.12), (1.14).

Когда на лицевой поверхности $z = h$ заданы смешанные условия (1.4), функции интегрирования $\sigma_{rz}^{(s)}, \sigma_{\varphi z}^{(s)}, \sigma_{zz}^{(s)}$ имеют вид

$$\sigma_{rz}^{(s)} = \sigma_{rz}^{*(s)} - \sigma_{rz}^{(s)} (\zeta = 1) \quad (r, \varphi)$$

$$\sigma_{\pi 0}^{(s)} = \frac{G(1-\nu)}{(1-2\nu)} (u_r^{+(s)} - u_r^{-(s)} - w_z^{(s)}(\zeta=1) + w_z^{(s)}(\zeta=-1)) \quad (1.15)$$

а для условий (1.15)

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi 0}^{(s)} &= \frac{1}{2} G (u_r^{+(s)} - u_r^{-(s)} - u_z^{(s)}(\zeta=1) + u_z^{(s)}(\zeta=-1)) \quad (r, \varphi; u, \nu) \\ \sigma_{\pi 0}^{(s)} &= \sigma_{\pi z}^{+(s)} - \sigma_{\pi z}^{-(s)}(\zeta=1) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Рекуррентные формулы (1.8)–(1.16) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения круговой кольцевой пластины во внутренней задаче с заранее заданной асимптотической точностью, если функции, заданные на лицевых поверхностях $z = \pm h$, имеют необходимого порядка частные производные, причем изменяемости этих функций не должны иметь порядок выше ε^{-1} .

Решения (1.8)–(1.16) справедливы всюду, кроме зоны погранслоя [4,6]. Для того, чтобы оно было справедливо и в этой области, необходимо к нему прибавить согласованное с ним решение задачи пограничного слоя.

2. Рассмотрим некоторые приложения выведенных рекуррентных формул.

а) Пусть на лицевой поверхности $z = -h$ кольцевой пластины заданы постоянные компоненты вектора перемещения, а на противоположной поверхности $z = h$ – нормальная и тангенциальные нагрузки постоянной интенсивности

$$\begin{aligned} u_j(z = -h) &= u_j^* = \text{const} \\ \sigma_{\mu\nu}(z = h) &= \sigma_{\mu\nu}^* = \text{const} \quad j = r, \varphi, z \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ограничившись двумя шагами итерации, достаточных для практических приложений, по формулам (1.8)–(1.13), с точностью $O(\varepsilon^2)$ получим

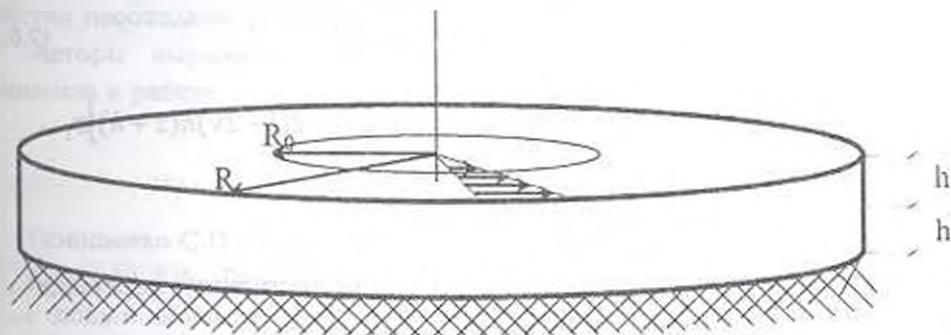
$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \sigma_{zz}^* + \frac{h-z}{r} \sigma_{rz}^*, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^*, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}^* \\ \sigma_{rr} &= \frac{\nu}{1-\nu} \left(\sigma_{zz}^* + \frac{z+3h}{r} \sigma_{rz}^* \right) + \frac{2\nu G}{1-\nu} \frac{u_r^*}{r} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}^* + \frac{1}{1-\nu} [(2-\nu)z + (2+\nu)h] \sigma_{rz}^* + \frac{2G}{1-\nu} \frac{u_r^*}{r} \\ \sigma_{rz} &= 0, \quad u_r = \frac{1}{G} (z+h) \sigma_{rz}^* \quad (r, \varphi) \\ u_z &= u_z^* + \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} (z+h) (\sigma_{zz}^* + \sigma_{rz}^* h/r) - \\ &\quad - \frac{1}{4rG(1-\nu)} [(h^2 - z^2) - 4\nu h(z+h)] \sigma_{rz}^* - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z+h}{r} u_r^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

б) Пусть теперь одна лицевая поверхность кольцевой пластины жестко закреплена, а к противоположной поверхности приложена пропорциональная r касательная нагрузка.

$$u_j(z = -h) = 0 \quad j = r, \varphi, z$$

$$\sigma_{zz}(z = h) = \sigma_{rz}(z = h) = 0 \quad \sigma_{\varphi z}(z = h) = \tau r \quad (2.3)$$

Задача моделирует кручение кольцевой пластины вокруг оси симметрии (фиг. 2)



Фиг. 2

Итерация обрывается на исходном приближении и приводит к математически точному решению внутренней задачи

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\varphi} = 0$$

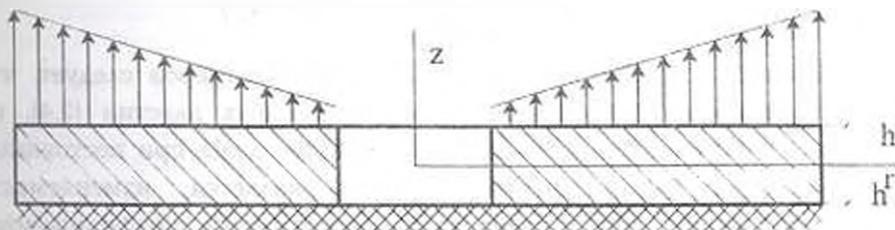
$$\sigma_{\varphi z} = \tau r; \quad u_{\varphi} = \frac{z+h}{G} \tau r, \quad u_r = u_z = 0 \quad (2.4)$$

в) Лицевая поверхность $z = -h$ кольцевой пластины жестко закреплена, а к поверхности $z = h$ приложена нормальная, линейная по r нагрузка (фиг. 3)

$$u_j(z = -h) = 0 \quad j = r, \varphi, z$$

$$\sigma_{rr}(z = h) = \sigma_{\varphi z}(z = h) = 0 \quad (2.5)$$

$$\sigma_{zz}(z = h) = \sigma_0 + \sigma_1 r$$



$$u_j = 0 \quad j = r, \varphi, z$$

Фиг. 3

Вычисленные по рекуррентным формулам (1.8) - (1.13) компоненты тензора напряжений и вектора перемещения, с точностью $O(\epsilon^2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_0 + \sigma_{1,r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_0 + \sigma_{1,r}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{\nu}{1-\nu} (h-z)\sigma_1, \quad \sigma_{z\varphi} = \sigma_{zr} = 0, \quad u_\varphi = 0 \\ u_r &= \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{G} h(z+h)\sigma_1 + \frac{1}{4G(1-\nu)} \left[(h^2 - z^2) - 2(1-2\nu)h(z+h) \right] \sigma_1 \dots \\ u_z &= u_z^- + (z+h) \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} (\sigma_0 + \sigma_{1,r}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

г) лицевым поверхностям пластины сообщены постоянные перемещения

$$u_j(z = \pm h) = u_j^{\pm} = \text{const} \quad j = r, \varphi, z \quad (2.7)$$

Напряжения и перемещения, вычисленные с точностью $O(\epsilon^2)$, такие

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{G\nu}{(1-2\nu)h} (u_r^+ - u_r^-) + \frac{G}{hr(1-\nu)} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} h(u_r^+ + u_r^-) + \frac{1}{2} z(u_r^+ - u_r^-) \right] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{G\nu}{(1-2\nu)h} (u_r^+ - u_r^-) + \frac{G}{hr(1-\nu)} \left[\frac{h(1-\nu)^2}{1-2\nu} (u_r^+ + u_r^-) + \frac{z}{2} (2-\nu)(u_r^+ - u_r^-) \right] \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{G}{2hr} \left[h(u_\varphi^+ + u_\varphi^-) + z(u_\varphi^+ - u_\varphi^-) \right], \quad \sigma_{rz} = \frac{G}{2h} (u_r^+ - u_r^-), \quad \sigma_{z\varphi} = \frac{G}{2h} (u_\varphi^+ - u_\varphi^-) \\ \sigma_{zz} &= \frac{(1-\nu)G}{(1-2\nu)h} (u_z^+ - u_z^-) + \frac{G}{hr} \left[\frac{h\nu}{1-2\nu} (u_r^+ + u_r^-) - \frac{z}{2} (u_r^+ - u_r^-) \right] \\ u_r &= \frac{1}{2h} \left[(h-z)u_r^- + (h+z)u_r^+ \right], \quad u_\varphi = \frac{1}{2h} \left[(h-z)u_\varphi^- + (h+z)u_\varphi^+ \right] \\ u_z &= \frac{1}{2h} \left[(h-z)u_z^- + (h+z)u_z^+ \right] + \frac{(z^2 - h^2)(1-4\nu)}{8hr(1-\nu)} (u_r^+ - u_r^-) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из решений (2.2), (2.6), (2.8) рассмотренных примеров следует, что итерационный процесс в отличие от прямоугольных пластин [2,4], не обрывается и не приводит к замкнутому решению даже при постоянных внешних воздействиях. Причиной этого является изменяемость координатных линий, обуславливающих переменность коэффициентов первой квадратичной формы.

Решение внутренней задачи однозначно определено в результате удовлетворения граничным условиям при $z = \pm h$, следовательно, это решение не будет удовлетворять граничным усилиям на боковой

поверхности пластины (за исключением простейших случаев). Условием на боковой поверхности будет соответствовать решение пограничного слоя. Это решение строится обычным образом и известным образом осуществляется его сращивание с решением внутренней задачи [4,6], что для данного класса задач — предмет отдельного рассмотрения.

Из (1.14), (2.8) следует также, что выведенные рекуррентные формулы не пригодны, когда пластина из несжимаемого материала. Для таких пластин необходимо установить иную асимптотику.

Авторы выражают благодарность Л.А. Агаловяну за советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Теория упругости. М.: ОНТИ, 1937.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // В кн. "Сборник трудов IV Всесоюзного симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов". Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т.50. Вып. 2. С. 271-278.
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. 414 с.
5. Агаловян Л.А. О погранслое ортотропных пластинок // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1973. Т. 26. № 2. С. 27-43.
6. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв. АН Арм. ССР Механика. 1984. Т. 37. № 6. С. 3-15.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.10.2000