

УДК 539.3.01

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ С УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ  
Մավաճաճե Ն.Ն.

Ն.Ն. Շավլաճաճ

Առածգական ներդրով կտր սալի ծառունը

Աշխատանքում դիտարկվում է առածգական ներդրով կտր սալի ծառուն կոնտակտային խնդիրը. Սալի եզրը կոշտ անրակցված է: Ներդիրի և սալի փոխազդեցության անհայտ ճիգի նկատմամբ ստացվում է սինգուլյար ինտեգրալ-դիֆերենցիալ եավասարում: Երբ ներդիրի կոշտությունը վախճվում է հաստով սրննքով, ալաինքն էրր սինգուլյար օպերատորի զորմակիը դառնում է բարձր կարգի վրո ինտեգրման սիլությունի ծալրակետերում, հավասարումը մի կողմից թերվում է համարմեջ Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման, իսկ մյուս կողմից համարմեջ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի Հետագոտվում է ալր համակարգի սեգուլյարությունը:

N.N.Shavlakadze

Bending of Circular Plate with Inclusion

В работе рассматривается контактная задача изгиба круглой пластинки с упругим включением. Граница пластинки жестко заделана. Относительно неизвестного контактного усилия взаимодействия включения с пластинкой получается сингулярное интегро-дифференциальное уравнение. При изменении жесткости включения специальным законом, т.е. когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль высокого порядка в концах промежутка интегрирования, уравнение сводится, с одной стороны, к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода, а с другой стороны, к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений. Исследуется эта система на регулярность.

Контактные задачи об изгибе конечных изотропных пластин, подкрепленных тонкими включениями или накладками (жесткими или упругими), рассмотрены в работах [1–4]. Эти задачи сведены к системам интегральных уравнений, характеристическая часть которых в общем случае имеет вид:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} \left[ \frac{a \operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} + \frac{b}{\pi i} \ln \frac{1}{|t-\tau|} \right] \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad |t| < 1 \quad (1)$$

и решение которого разыскивалось в классе функции с псеинтегрируемыми особенностями с использованием аппарата регуляризации расходящихся интегралов [5].

В данной работе исследована контактная задача круглой пластинки с упругой накладкой переменной изгибной жесткости. Задача сведена к решению интегрального уравнения, характеристической частью которого является интегро-дифференциальное уравнение Прандтля, которое в некоторых условиях изучено в [6–9]. Но когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль любого порядка в концах линии интегрирования, оно эквивалентно сводится к интегральному уравнению третьего рода. Нами исследованы интегро-дифференциальные уравнения с такими коэффициентами, в некоторых условиях получены эффективные решения, установлены асимптотические оценки решения таких уравнений, на основе которого получены поведения неизвестных контактных усилий в концах упругих накладок [10–12].

Рассмотрим задачу об изгибе круглой изотропной пластинки единичного

радиуса, подкрепленной тонким упругим включением переменной изгибной жесткости по отрезку:  $y = 0, |x| < a$  ( $a < 1$ ). К пластинке приложена нормальная нагрузка постоянной интенсивности  $q$ , а включение свободно от нагружения. Граница пластинки жестко заделана.

Введем обозначения:  $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $S = \Omega \setminus [-a, a]$ . Требуется найти контактные условия взаимодействия включения с пластинкой. Поставленные задачи эквивалентны отысканию решения неоднородного бигармонического уравнения:

$$D\Delta\Delta\omega(x, y) = q, \quad (x, y) \in S \quad (2)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\omega = 0, \quad \partial\omega/\partial n = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (3)$$

и условиям на включение в силу симметрии задачи относительно прямой  $y = 0$ :

$$\langle w \rangle = \langle w'_y \rangle = \langle M_y \rangle = 0, \quad \langle N_y \rangle = \mu(x), \quad \mu(x) = \mu(-x), \quad |x| < a, \quad |y| = 0 \quad (4)$$

Здесь использовано обозначение:  $\langle f \rangle = f(x-0) - f(x+0)$ ,  $\omega$  — прогиб пластинки,  $D$  — цилиндрическая жесткость пластинки,  $\omega'_y$ ,  $M_y$ ,  $N_y$  — соответственно угол поворота, изгибающий момент и обобщенная поперечная сила в пластинке,  $\mu(x)$  — неизвестное усилие взаимодействия включения с пластинкой, причем  $\mu(x) \equiv 0$  при  $|x| > a$ ,  $n$  — внешняя нормаль границы пластинки.

Считая концы включения свободными, относительно прогиба включения  $\omega_0(x)$  получаются следующие условия:

$$\frac{d^2}{dx^2} D_0(x) \frac{d^2 \omega_0(x)}{dx^2} = -\mu(x), \quad |x| < a \quad (5)$$

$$D_0(x) \omega_0''(x) \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad [D_0(x) \omega_0''(x)] \Big|_{x=\pm a} = 0 \quad (6)$$

где  $D_0(x) = E_0(x)h_0^3(x)/12$  — жесткость включения на изгиб,  $E_0(x)$  — модуль упругости ее материала,  $h_0(x)$  — ее толщина.

Условия (6) эквивалентны обычным статическим условиям равновесия включения:

$$\int_{-a}^a \mu(t) dt = 0, \quad \int_{-a}^a t\mu(t) dt = 0 \quad (7)$$

На участке контакта  $[-a, a]$  упругого включения с пластинкой выполняется условие

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x) \quad (8)$$

Решение краевой задачи (2)-(8) будем искать в Банаховом пространстве  $W(\Omega)$  функций  $\omega(x, y)$ , удовлетворяющих условиям (3), имеющих суммируемые вторые производные с нормой

$$\|\omega\|_W = \left( \iint_{\Omega} \left[ (\Delta\omega)^2 - 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} \right)^2 \right) \right] d\Omega \right)^{1/2}$$

С точки зрения механики это пространство описывает класс функций прогибов, для которых потенциальная энергия изгиба пластинки положительна и конечна. Доказывается, что в этом классе поставленная задача (2)-(8) имеет единственное решение.

Общее решение уравнения (2) представляется в виде:

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) + \omega_2(x, y)$$

где  $\omega_1(x, y)$  — частное решение, например,  $\omega_1(x, y) = q(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)/64D$ , а  $\omega_2(x, y)$  удовлетворяет однородному уравнению:  $\Delta\Delta\omega_2 = 0$  с неоднородными граничными условиями:

$$\omega_2 = -\omega_1, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial n} = -\frac{\partial\omega_1}{\partial n}, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (9)$$

Как известно [13], бигармоническая функция представляется формулой Гурса:

$$\omega_2(x, y) = 2 \operatorname{Re} [z\varphi(z) + \chi(z)] \quad (10)$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\chi(z)$  — функции комплексного переменного  $z = x + iy$ , голоморфные в  $S$ . Для изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ , скручивающего момента  $H_{xy}$  и перерезывающих сил  $N_x$ ,  $N_y$  имеют место формулы [14]:

$$\begin{aligned} M_x - M_y + 2iH_{xy} &= 4(1-\sigma)D[z\varphi'(z) + \psi'(z)] \\ M_x + M_y &= -8(1+\sigma)D \operatorname{Re}\varphi'(z), \quad N_x - iN_y = -8D\varphi''(z) \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\psi(z) = \chi'(z)$ ,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

Введем в рассмотрение новую функцию  $\Omega_0(z)$  равенством

$$\Omega_0(z) = z\varphi'(z) + \psi(z)$$

тогда из первых двух условий (4) получается

$$\left[ \varphi(t) - \overline{\Omega_0(t)} \right]^- - \left[ \varphi(t) - \overline{\Omega_0(t)} \right]^+ = 0, \quad t \in (-a, a)$$

откуда имеем

$$\varphi(z) - \overline{\Omega_0(\bar{z})} = F_{01}(z), \quad z \in \Omega \quad (12)$$

где функция  $F_{01}(z)$  голоморфна в области  $\Omega$ .

Учитывая формулы (11), из двух последних условий (4) имеем

$$\begin{aligned} \left[ \varphi''(t) + \overline{\varphi''(t)} \right]^- - \left[ \varphi''(t) + \overline{\varphi''(t)} \right]^+ &= 0 \\ \left[ \varphi''(t) - \overline{\varphi''(t)} \right]^- - \left[ \varphi''(t) - \overline{\varphi''(t)} \right]^+ &= \frac{i\mu(t)}{4D} \quad |t| < a \end{aligned}$$

Складывая последние условия, получим:

$$\varphi''^+(t) - \varphi''^-(t) = -\frac{i\mu(t)}{8D} \quad |t| < a \quad (13)$$

Функция  $\mu(t)$  может иметь неинтегрируемые особенности на сегменте  $[-a, a]$ , учитывая проведенные в [4] доказательства о

перенесенных результатах монографий [15] на регуляризованные значения расходящихся интегралов [5], тогда решение граничной задачи (13) дается формулой:

$$\varphi^*(z) = -\frac{1}{16\pi D} \int_{-a}^a \frac{\mu(t) dt}{t-z} + F_{02}(z), \quad z \in \Omega \quad (14)$$

где  $F_{02}(z)$  — голоморфная функция в области  $\Omega$ .

На основании формул (12), (14), функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{16\pi D} \int_{-a}^a (t-z) \ln(t-z) \mu(t) dt + F_1(z) \\ \psi(z) &= -\frac{1}{16\pi D} \int_{-a}^a t \ln(t-z) \mu(t) dt + F_2(z) \quad z \in \Omega \end{aligned} \quad (15)$$

где  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  — голоморфные в  $\Omega$  функции, подлежащие определению.

Для определения этих функций в силу условий (9) на границе круга, получается следующее граничное условие:

$$F_1(t) + iF_1'(t) + \overline{F_2(t)} = -f_1(t) - if_1'(t) - \overline{f_2(t)} - qt/16D \quad (16)$$

где

$$f_1(z) = -\frac{1}{16\pi D} \int_{-a}^a (t-z) \ln(t-z) \mu(t) dt, \quad f_2(z) = -\frac{1}{16\pi D} \int_{-a}^a t \ln(t-z) \mu(t) dt$$

— аналитические функции в области  $S$ .

Переходя к сопряженным значениям в условии (16), по формуле Коши имеем:

$$\begin{aligned} F_1(z) + \bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \bar{a}'_0 &= -z f_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \overline{f_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - \frac{qz}{16D} \\ \bar{a}_0 + \frac{F_1(z)}{z} - \frac{a_1}{z} + F_2(z) &= -f_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

где постоянные  $a_1, a_2, a_0, a'_0$  — коэффициенты разложения функций  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  (т.е.  $F_1(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ ,  $F_2(z) = a'_0 + a'_1 z + \dots$ ), они определяются из следующих соотношений:

$$a_0 + 2\bar{a}_2 + \bar{a}'_0 = 0, \quad a_1 + \bar{a}_1 = -\frac{1}{16\pi D} \int_{-a}^a t^2 \mu(t) dt - \frac{q}{16D}, \quad 2a_2 = \frac{1}{16\pi D} \int_{-a}^a t^3 \mu(t) dt$$

Предыдущие формулы показывают, что если функция  $\mu(t)$  найдена, то определены постоянные  $a_2$  и  $\text{Re} a_1$ , поэтому, как и следовало ожидать, функция  $\varphi(z)$  определяется с точностью до выражения  $Ciz + \gamma$ , где  $C$  — действительная, а  $\gamma$  — комплексная произвольные постоянные, а функция  $\psi(z)$  — с точностью комплексного постоянного  $\gamma'$ .

Из формул (17) определяются искомые функции  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$ :

$$\begin{aligned}
 F_1(z) &= -\bar{a}_1 z - 2\bar{a}_2 - \bar{a}'_0 - z\bar{f}_1(1/z) - \bar{f}_2(1/z) - qz/16D \\
 F_2(z) &= -a_0 + (a_1 + \bar{a}_1)/z - \bar{f}_1(1/z) + \bar{f}'_1(1/z)/z - \bar{f}_1(1/z)/z^2 - \\
 &\quad - \bar{f}'_2(1/z)/z^2 + q/16Dz
 \end{aligned} \tag{18}$$

Приняв во внимание последние формулы, условие контакта (8) и формулу (15), дифференциальное уравнение изгиба включения (5) примет вид

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{8\pi D} \int_{-a}^a |t-x| \mu(t) dt - \frac{1}{8\pi D} \int_{-a}^a |\ln|t-x|| \mu(t) dt - \frac{2x^2-1}{16\pi D} \int_{-a}^a \frac{t^2 \mu(t)}{tx-1} dt + \\
 &+ \frac{3x^2-1}{16\pi D} \int_{-a}^a \frac{t^2 \mu(t)}{(tx-1)^2} dt + \frac{x-2x^3}{16\pi D} \int_{-a}^a \frac{t^3 \mu(t)}{(tx-1)^2} dt + \frac{1}{16\pi D} \int_{-a}^a \frac{t^4 \mu(t)}{(tx-1)^2} dt - \\
 &- \frac{q}{8D} - 2 \operatorname{Re} a_1 = -\frac{1}{D_0(x)} \int_{-a}^a dt \int_{-a}^a \mu(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

Вводя обозначение:  $\lambda(x) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \mu(\tau) d\tau$ , приходим к интегро-дифференциальному уравнению:

$$\lambda(x) - \frac{D_0(x)}{8\pi D} \int_{-a}^a \frac{\lambda'(t) dt}{t-x} + \frac{D_0(x)}{8\pi D} \int_{-a}^a R(x,t) \lambda'(t) dt = f_0 D_0(x), \quad |x| < a \tag{19}$$

при условии

$$\lambda(\pm a) = 0, \quad \lambda'(\pm a) = 0 \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 R(x,t) &= \frac{x}{tx-1} + \frac{(2x^2-1)t^2 x}{2(tx-1)^2} + \frac{2t(3x^2-1) - (x-2x^3)(t^3 x - 3t^2) - 2t^3(tx-2)}{2(tx-1)^3} - \\
 &\quad - 2t, \quad f_0 = q/16D
 \end{aligned}$$

Когда коэффициент при сингулярном операторе в (19) изменяется по следующему закону:  $D_0(x) = \sqrt{a^2 - x^2} d(x)$ , ( $d(x)$  — любая непрерывная функция на сегменте  $[-a, a]$ ,  $d(x) > 0$ ), уравнение (19)-(20) можно свести к квазирегулярному интегральному уравнению [8]. Весьма простым способом, изложенным в работах [6-7], можно получить регулярное интегральное уравнение, эквивалентное интегро-дифференциальному уравнению (19)-(20), которое допускает эффективное решение, когда  $d(x)$  — рациональная функция.

Уравнение (19) запишем в следующем виде:

$$K\lambda = \Pi\lambda + R\lambda = f_0 \tag{21}$$

где  $\Pi$  — характеристическая часть оператора  $K$ , т.е.

$$\Pi\lambda = \frac{\lambda(x)}{D_0(x)} - \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\lambda'(t) dt}{t-x}, \quad |x| < a, \quad \lambda_0 = \frac{1}{8D}$$

$$R\lambda = \int_0^a R_0(x,t)\lambda(t)dt, \quad R_0(x,t) = -R'_t(x,t)$$

Перепишем (21) в виде

$$\Pi\lambda = f_0 - R\lambda$$

и решим предыдущее уравнение, как если бы правая часть была заданной функцией. В работе [10] доказано, что последнее уравнение имеет единственное решение и оно представляется в явном виде при коэффициенте:  $D_0(x) = d_0(a^2 - x^2)^{n-1/2}$ ,  $d_0 = \text{const}$ ,  $n \geq 1$  – натуральное число. (Метод построения решения проходит и в том случае, когда  $D_0(x) = (a^2 - x^2)^{n-1/2} P(x)$ , где  $P(x)$  – рациональная функция).

На основании результатов [10] имеем:

$$\lambda(x) + K^* R\lambda = K^* f_0 + \int_0^a \frac{\cos[Q(t) - Q(x)]}{\sqrt{a^2 - t^2}} \sum_{k=1}^n A_k \left[ \frac{1}{(a-t)^k} - \frac{1}{(a+t)^k} \right] dt \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} K^* g &= -\frac{1}{\lambda_0} \int_0^a \sin[Q(t) - Q(x)] g(t) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi \lambda_0} \int_0^a \frac{\cos[Q(t) - Q(x)]}{\sqrt{a^2 - t^2}} \left[ \int_{-\infty}^a \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2} g(\tau) d\tau}{\tau - t} \right] dt \\ K^* f_0 &= -\frac{f_0}{\lambda_0} \int_0^a \sin[Q(t) - Q(x)] g(t) dt - \frac{f_0}{\lambda_0} \int_0^a \frac{t \cos[Q(t) - Q(x)]}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt \\ Q(x) &= \frac{1}{\lambda_0} \int_0^a \frac{dt}{D_0(t)} \end{aligned}$$

$A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – неизвестные постоянные.

К уравнению (22) следует присоединить еще следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a-0} \left\{ \frac{\lambda_0^j}{a} F_\lambda(0) D_0(0) + i \lambda_0 \int_0^a A'_\lambda(t) e^{iQ(t)} dt \right\} = \\ = \lim_{z \rightarrow a-0} \left\{ \Phi(0) + \frac{\lambda_0^j}{a} F_{f_0}(0) D_0(0) + i \lambda_0 \int_0^a A'_{f_0}(t) e^{iQ(t)} dt \right\} \\ \frac{2\pi(2j-2)}{2n-1} \leq \arg(z+a) < \frac{2\pi(2j-1)}{2n-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\Phi(0) = -\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{F_{f_0}(t) - F_\lambda(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} e^{iQ(t)} dt$$

$$F_{f_0}(z) = \frac{f_0}{2\lambda_0} (\sqrt{z^2 - a^2} - z) + \sum_{k=1}^n A_k \left[ \frac{1}{(a-z)^k} - \frac{1}{(a+z)^k} \right] \quad (24)$$

$$F_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi\lambda_0} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-z} \left[ \int_{-a}^a R_0(t,s) \lambda(s) ds \right] dt$$

$$A_{f_0}(z) = d_0(a^2 - z^2)^n F_{f_0}(z), \quad A_\lambda(z) = d_0(a^2 - z^2)^n F_\lambda(z)$$

$$\lambda(0) = 2\Phi_+(0), \quad \Phi(z) = e^{-iQ(z)} \left[ \Phi(0) + \int_0^z \frac{F_{f_0}(t) - F_\lambda(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} e^{iQ(t)} dt \right]$$

Таким образом, исходное интегро-дифференциальное уравнение эквивалентно уравнению (22) и совокупности уравнений (23)-(24). Уравнение (21) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода. его можно преобразовать следующим образом:

$$\lambda(x) + d_0(a^2 - x^2)^{n+1/2} \int_{-a}^a D(x,t) \lambda(t) dt = d_0(a^2 - x^2)^{n+1/2} g(x), \quad |x| < a \quad (25)$$

где

$$D(x,t) = R_0(x,t) - \frac{[a^{2n+1} R(0,t) + K_1(x,t) + L_1(x,t) / \pi] \cos Q(x)}{(a^2 - x^2)^{n+1/2}}$$

$$- \frac{[a^{2n} L(0,t) / \pi + K_2(x,t) + L_2(x,t) / \pi] \sin Q(x)}{(a^2 - x^2)^{n+1/2}}$$

$$g(x) = f_0 + \frac{\left[ \lambda(0) - d_0 a^{2n+1} f_0 - \int_0^x B_1'(t) \cos Q(t) dt - \lambda_0 \int_0^x B_2'(t) \sin Q(t) dt \right]}{d_0(a^2 - x^2)^{n+1/2}} \times$$

$$\times \cos Q(x) + \frac{\left[ - \int_0^x B_1'(t) \sin Q(t) dt + \lambda_0 \int_0^x B_2'(t) \cos Q(t) dt \right] \sin Q(x)}{d_0(a^2 - x^2)^{n+1/2}}$$

$$B_1(t) = f_0(a^2 - t^2)^{n+1/2}, \quad B_2(t) = (a^2 - t^2)^n \left\{ - \frac{f_0}{\lambda_0} t + \sum_{k=1}^n A_k \left[ \frac{1}{(a-t)^k} - \frac{1}{(a+t)^k} \right] \right\}$$

$$K_1(x,s) = \int_0^x [(a^2 - t^2)^n R_0(t,s)]_t \cos Q(t) dt$$

$$L_1(x,s) = \int_0^x [(a^2 - t^2)^n L(t,s)]_t \sin Q(t) dt$$

$$K_2(x,s) = \int_0^x [(a^2 - t^2)^n R_0(t,s)]_t \sin Q(t) dt$$

$$L_2(x,s) = \int_0^x [(a^2 - t^2)^n L(t,s)]_t \cos Q(t) dt$$

$$L(t, s) = \int_{-a}^s \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2} R_0(\tau, s)}{t - \tau} d\tau$$

Заметим, что  $D(x, t)$ , по крайней мере, дважды дифференцируемая функция в квадрате  $-a \leq (x, t) \leq a$ , а  $g(x)$  — на интервале  $[-a, a]$

Переходя к промежутку  $[-1, 1]$  с помощью замены  $x = ay, t = a\tau$ , из (25) получим уравнение:

$$\lambda_0(y) + v_0(1 - y^2)^{n+1/2} \int_{-1}^1 D_0(y, \tau) \lambda_0(\tau) d\tau = v_0(1 - y^2)^{n+1/2} g_0(y), \quad |y| < 1 \quad (26)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\lambda_0(y) = \lambda(ay), \quad D_0(y, \tau) = D(ay, a\tau), \quad g_0(y) = f(ay), \quad v_0 = d_0 a^{2n+1}$$

Теперь изложим методику сведения последнего интегрального уравнения к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. С указанной целью, исходя из асимптотического поведения решения характеристического уравнения [10], решение представим бесконечным рядом:

$$\lambda_0(y) = (1 - y^2)^{n+1/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} P_{2k}^{(n+1/2, n+1/2)}(y) \quad (27)$$

с неизвестными коэффициентами  $a_{2k}$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) из пространства ограниченных числовых последовательностей.  $P_{2k}^{(a, a)}(y)$  — полиномы Якоби, ( $P_{2k}^{(a, a)}(y) = P_{2k}^{(a, a)}(-y)$ ).

Далее, (27) подставим в уравнение (26), умножим последнее равенство на  $P_{2m}^{(n+1/2, n+1/2)}(y)$ , проинтегрируем от  $-1$  до  $1$ , примем во внимание условие ортогональности полиномов Якоби [16], для определения неизвестных коэффициентов  $a_{2k}$  получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{2^{2n+1} \Gamma^2(2m + n + 3/2)}{(2m)!(2m + n + 1)\Gamma(2m + 2n + 2)} a_{2m} + v_0 \sum_{k=0}^{\infty} D_{2k, 2m} a_{2k} = g_{2m}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (28)$$

где

$$D_{2k, 2m} = \int_{-1}^1 (1 - y^2)^{n+1/2} P_{2m}^{(n+1/2, n+1/2)}(y) dy \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{n+1/2} P_{2k}^{(n+1/2, n+1/2)}(\tau) D_0(y\tau) d\tau$$

$$g_{2m} = v_0 \int_{-1}^1 (1 - y^2)^{n+1/2} P_{2m}^{(n+1/2, n+1/2)}(y) g_0(y) dy$$

Теперь приступим к исследованию бесконечной системы (28) на регулярность, для этого ее перепишем в следующем виде

$$a_{2m} - v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{D}_{2k, 2m} a_{2k} = \tilde{g}_{2m}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (29)$$

где

$$\tilde{D}_{2k,2m} = \frac{(2m)!(2m+n+1)\Gamma(2m+2n+2)}{2^{2n+1}\Gamma^2(2m+n+3/2)} D_{2k,2m}$$

$$\tilde{g}_{2m} = \frac{(2m)!(2m+n+1)\Gamma(2m+2n+2)}{2^{2n+1}\Gamma^2(2m+n+3/2)} g_{2m}$$

Применяя формулу Стирлинга для Гамма-функции и формулу Родрига для многочленов Якоби [17], получим:

$$\frac{\Gamma^2(2m+n+3/2)}{(2m!)\Gamma(2m+2n+2)} \rightarrow 1 \text{ при } m \rightarrow \infty$$

$$g_{2m} = \frac{v_0}{2^2 2m(2m-1)} \int_{-1}^1 (1-y^2)^{n+5/2} P_{2m-2}^{(n+5/2, n+5/2)}(y) \frac{\partial^2 g_0(y)}{\partial y^2} dy$$

$$D_{2k,2m} = \frac{1}{2^4 2k(2k-1)2m(2m-1)} \int_{-1}^1 (1-y^2)^{n+5/2} P_{2m-2}^{(n+5/2, n+5/2)}(y) dy \times$$

$$\times \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^{n+5/2} P_{2k-2}^{(n+5/2, n+5/2)}(\tau) \frac{\partial^4 D_0(y, \tau)}{\partial y^2 \partial \tau^2} d\tau$$

Эти представления позволяют утверждать, что

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} \tilde{D}_{2k,2m}^2 < \infty, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{g}_{2m}^2 < \infty$$

Таким образом, бесконечная система (28) при любом  $v_0 > 0$  квазивполне регулярна [17].

Правую часть системы (29) можно представить в виде

$$\tilde{g}_{2m} = \tilde{g}_{2m}^f + \lambda(0)\tilde{g}_{2m}^i + \sum_{i=1}^n \tilde{g}_{2m}^i A_i, \quad m = 0, 1, \dots$$

Решение бесконечной системы при правой части, равной  $\tilde{g}_{2m}^f$ , обозначим через  $a_{2m}^f$ , при первой части  $\tilde{g}_{2m}^i$  — через  $a_{2m}^0$ , а при правой части  $\tilde{g}_{2m}^i$  — через  $a_{2m}^i$ , тогда

$$a_{2m} = a_{2m}^f + \lambda(0)a_{2m}^0 + \sum_{i=1}^n a_{2m}^i A_i, \quad m = 0, 1, \dots$$

Подставляя эти формулы в (23)-(24), получается конечная система алгебраических уравнений относительно постоянных  $\lambda(0)$ ,  $\Phi(0)$ ,  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Теорема единственности поставленной задачи, эквивалентность исходного интегро-дифференциального уравнения (19)-(20), с одной стороны, к интегральному уравнению (25) Фредгольма второго рода, а с другой стороны, к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (29), позволяют сделать заключение:

Однородная система уравнений, соответствующая системе (29), имеет в  $l_2$  тривиальное решение, а неоднородная система (29) имеет единственное решение, каковой бы ни была последовательность правых частей из  $l_2$  [18].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Онищук О.В., Попов Г.Я. О некоторых задачах пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141-150.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. Онищук О.В., Попов Г.Я., Процеров Ю.С. О некоторых контактных задачах для подкрепленных пластин // ПММ. 1984. Т. 48. №2. С. 307-314.
4. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т. 50. № 2. С. 293-302.
5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
6. Векуа И.Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // ПММ. 1945. Т. 9. № 2. С. 143-150.
7. Магнарадзе А.Г. Об одном интегральном уравнении теории крыла самолета // Сообщ. АН ГССР. 1942 Т. 3. № 6. С. 503-508.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
9. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 254 с.
10. Shavlakadze N. On some contact problems for bodies with elastic inclusion // Georg. Math. J. 1998. V.5. № 3. PP. 285-300.
11. Shavlakadze N. A contact problem of the Interection of a semi-finite inclusion with a plate // Georg. Math. J. 1999. V.6. № 5. PP. 489-500.
12. Shavlakadze N. On singularities of contact stress upon tension and bending of plates with elastic inclusion // Prof. of A. Razmadze math. Inst. 1999. 120. PP. 135-147.
13. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
14. Фридман М.М. О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит // ПММ. 1941. Т. 5. № 1. С. 93-102.
15. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
16. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
17. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Тбилисский математический  
институт им. А.М. Размадзе

Поступила в редакцию  
26.12.2000