ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №1, 2001 Механика
УДК 539.3: 539.375

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО ТЕЛА С КРУГЛОЙ ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Асанян Д. Д

Դ. Ջ. Հասանյան

Կլոր դիսկաձև ճաքով կտոր առ կտոր համասեռ ֆերոմագնիսական տարածության լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը

Մագնիսաառածգականության գծային հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրված է երկու կտոր առ կտոր համասեռ ֆերոմագնիսական տարածության լարվածա դեֆորմացիոն վիճակը, երբ նրանց բաժանման մակերևույթին առկա է կլոր դիսկաձև ճաք. Ենթադրվում է որ համակարգը տեղադրված է համասեռ մագնիսական դաշտում, որի լարվածության վեկտորը ուղղահայաց է երկու տարածությունների բաժանման մակերևույթին: Ուսումնասիրված է մագնիսական դաշտի, անհամասեռության և մագնիսական հատկությունների ազդեցությունը լարումների և լարումների կոնցենտրացիայի գործակցի վրա: Ցույց է տրված որ նշված պարամետրերը կարող են ունենալ ինչպես քանակական այնպես էլ որակական ազդեցություն:

D. J. Hasanyan

Stress-deformation state piecewise homogeneous ferromagnetic space with a penny shaped crack

Исходя из линеаризированных уравнений теории магнитоупругости, исследуется напряженно-деформированное состояние магнитоупругого пространства с круглой дискообразной трещиной, находящейся на поверхности раздела двух различных однородных полупространств. Предполагается, что система помещена в однородное магнитное поле перпендикулярное к поверхности раздела двух полупространств. Исследовано влияние неоднородности среды, магнитных свойств полупространств и магнитного поля на упругие напряжения и коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений. Показано, что вышеперечисленные параметры могут иметь как качественное, так и количественное влияние на магнитоупругие напряжения.

Введение. В последнее время резко возросло число работ, посвященных проблеме разрушения упругих тел с трещинами в электромагнитных полях [1-5]. Оказывается, что электромагнитные поля могут существенно повлиять на напряженно-деформированное состояние (НДС) около трещины. Они могут как остановить процесс разрушения [1,5], так и стать его причиной [1,2-4]. Рассматривается задача о осесимметричном напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного ферромагнитного пространства с круглой дискообразной трещиной в однородном магнитном поле. Предполагается, что трещина находится на поверхности раздела двух различных однородных упругих полупространств. Задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций на конечном интервале. Неизвестные функции определяются аналитически, что позволяет получить формулы для магнитоупругих напряжений и коэффициента интенсивности магнитоупругих напряжений. На основе полученных формул исследуется влияние различных физико-механических параметров задачи и

магнитного поля на напряженно-деформированное состояние пространства около трещины.

1.Основные уравнения и граничные условия. Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению объемных и поверхностных сил. Под действием этих сил в среде возникают деформации, возбуждающие добавочное (индуцированное) магнитное поле.

Рассмотрим задачу определения НДС кусочно-однородного ферромагнитного пространства, состоящего из двух различных магнитомягких ферромагнитных полупространств, на границе раздела которых находится дисковидная трещина радиуса a. Обозначим через (r,θ,z) цилиндрические координаты точки в пространстве, где ось z параллельна оси симметрии тела. Через (f_r, f_θ, f_z) обозначим компоненты вектора f в цилиндрической системе координат. Далее будем предполагать, что тело находится в однородном магнитном поле $\boldsymbol{B}_0 = (0,0,B_0)$, $B_0 = \text{const}$. На поверхности трещины действуют вертикальные равномерно распределенные и противоположно направленные механические силы $\boldsymbol{P}_m = (0,0,P)$, $P = \text{const}$, обеспечивающие деформацию нормального разрыва, исключающие контакт берегов трещины. Предположим также, что деформация тела осесимметрична, т.е. для всех искомых вектор-функций f компонента f_θ равна нулю, а компоненты f_r и f_z не зависят от координаты θ. НДС среды определим из уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела (предложенной в [6]). Как известно, нетривиальные компоненты магнитоупругих напряжений t_{km} и максвелловских напряжений t_{km}^M имеют следующий вид [4]:

$$t_{rr} = 2\mu\left\{(1-\nu)u_{r,r} + \nu\left(\frac{u_r}{r} + u_{z,z}\right)\right\}/(1-2\nu)$$

$$t_{zr} = t_{rz} = \mu(u_{r,z} + u_{z,r}) + \mu_0 M_{0z} m_r/\chi$$

$$t_{\theta\theta} = 2\mu\{(1-\nu)\frac{u_r}{r} + \nu(u_{r,r} + u_{z,z})\}/(1-2\nu)$$

$$t_{zz} = 2\mu\left\{(1-\nu)u_{z,z} + \nu\left(\frac{u_r}{r} + u_{r,r}\right)\right\}/(1-2\nu) + M_{0z}^2/\chi + 2\mu_0 M_{0z} m_z/\chi$$

$$t_{rr}^M = t_{zr}^M = \mu_0\mu_r H_{0z} h_r,\ t_{rr}^M = t_{\theta\theta}^M = -B_{0z}^2/2\mu_0 - B_{0z} h_z$$

$$t_{zz}^M = \mu_0(1+2\chi)H_{0z}[0.5H_{0z} + h_z],\ m = \chi\, h,\ b = \mu_0\mu_r h \quad (1.1)$$

В силу вышепринятых предположений, линеаризованная система уравнений возмущенного состояния магнитомягкого ферромагнитного тела, находящегося в магнитном поле B_0, в цилиндрической системе координат примет следующий вид:

$$t_{rr,r}^{(J)} + \frac{1}{r}t_{rr}^{(J)} + t_{zz,z}^{(J)} - \frac{1}{r}t_{\theta\theta}^{(J)} + \mu_0 M_{0z}^{(J)} h_{r,z}^{(J)} = 0 \quad (1.2)$$

$$t_{rr,r}^{(j)} + \frac{1}{r} t_{rr}^{(j)} + t_{rz,z}^{(j)} + \mu_0 M_{0z}^{(j)} h_{r,r}^{(j)} = 0 \qquad (1.3)$$

$$h_{r,z}^{(j)} - h_{z,r}^{(j)} = 0, \quad \frac{1}{r}(r h_r^{(j)})_{,r} + h_{z,z}^{(j)} = 0 \quad (j = 1,2) \qquad (1.4)$$

где $M_{0z}^{j} = (\mu_\eta - 1) B_{0z} / \mu_\eta$ – компонента вектора намагниченности в невозмущенном состоянии, а индексы $j = 1$ и $j = 2$ означают принадлежность к областям $z > 0$ и $z < 0$, соответственно. Заметим, что (1.2), (1.3) являются уравнениями равновесия для магнитоупругих сред, а (1.4) является уравнением Максвелла. Решение системы (1.2)-(1.4) ищется в классе функций, стремящихся к нулю, при $|z| \to \infty$.

Граничные условия для поставленной задачи имеют вид ([3-6]):

$$\begin{cases} u_r^{(1)} = u_r^{(2)}; \; u_z^{(1)} = u_z^{(1)} \\ h_r^{(1)} - h_r^{(2)} = \dfrac{\chi_1 - \chi_2}{\mu_{r1}\mu_{r2}} u_{z,r}^{(1)} \end{cases} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad r > a \qquad (1.5)$$

$$\begin{cases} \mu_{r1} h_z^{(1)} = \mu_{r2} h_z^{(2)}, t_{rr}^{(1)} + t_{rr}^{M(1)} = t_{rr}^{(2)} + t_{rr}^{M(2)} \\ t_{rz}^{(1)} + t_{rz}^{M(1)} = t_{rz}^{(2)} + t_{rz}^{M(2)} \end{cases} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad r < \infty \qquad (1.6)$$

$$\begin{cases} h_r^{(1)} - h_r^{(2)} = \dfrac{\chi_1}{\mu_{r1}} u_{z,r}^{(1)} - \dfrac{\chi_2}{\mu_{r2}} u_{z,r}^{(2)}, \; t_{rr}^{(1)} / \mu_1 = -\dfrac{\chi_1 b_c^2}{\mu_{r1}} u_{z,r}^{(1)} \\ t_{zz}^{(1)} / \mu_1 = -P_0 - \dfrac{\chi_1^2 b_c^2}{2\mu_{r1}^2}(1 + 2\mu_{r1} h_z^{(1)}) \end{cases} \quad \text{при } z = 0, \; r < a \qquad (1.7)$$

Здесь: $\nu_j, \mu_j, \mu_{0j}, \chi_j = \mu_\eta - 1, \; (j = 1,2)$ – упругие и магнитные постоянные j-ого полупространства; δ_{ij} – символ Кронекера; $b_c^2 = B_0^2 / \mu_0 \mu_1$, а $P_0 = P / \mu_1$ – компонента приведенной механической силы, действующей на берег трещины.

Как видно из (1.5)-(1.7), упругие перемещения u_r, u_θ и компоненты возмущенного магнитного поля h_r, h_θ связаны также граничными условиями.

Решения уравнений (1.2)-(1.4), с учетом условий на бесконечности, имеют вид:

$$u_r^{(j)}(r,z) = \int_0^\infty (-1)^{j+1} \{\alpha A^{(j)}(\alpha) - (-1)^{j+1}(3 - 4\nu_j) B^{(j)}(\alpha) + \alpha z B^{(j)}(\alpha) +$$

$$+ 2(1 - 2\nu_j) \frac{\chi_j B_0^2}{\mu_0 \mu_j \mu_\eta} \alpha a^{(j)}(\alpha)\} J_1(\alpha r) \exp[(-1)^j \alpha z] d\alpha \qquad (1.8)$$

$$u_z^{(j)}(r,z) = \int_0^\infty \alpha [A^{(j)}(\alpha) + \alpha z B^{(j)}(\alpha)] J_0(\alpha r) \exp[(-1)^j \alpha z] d\alpha \qquad (1.9)$$

$$\phi^{(j)}(r,z)=\int_0^\infty \alpha\, a^{(j)}(\alpha)J_0(\alpha r)\exp[(-1)^j\alpha z]d\alpha\,.\quad (j=1,2) \tag{1.10}$$

где $A^{(j)}(\alpha), B^{(j)}(\alpha)$ и $a^{(j)}(\alpha)$ $(j=1,2)$ –неизвестные функции, которые далее определяются из граничных условий (1.5)-(1.7), а $J_0(\alpha r)$ и $J_1(\alpha r)$ – функции Бесселя. Таким образом, определение НДС ферромагнитного пространства с дискообразной трещиной сводится к нахождению функций $A^{(j)}(\alpha), B^{(j)}(\alpha)$ и $a^{(j)}(\alpha)$ $(j=1,2)$. Подставляя (1.8)- (1.10) в (1.1), определим магнитоупругие напряжения в каждом полупространстве. В частности, для $t_{zz}^{(1)}(r,z)$ и $t_{zz}^{M(1)}(r,z)$ имеем:

$$t_{zz}^{(1)}(r,z)/\mu_1=\frac{\chi_1}{\mu_{r1}}b_c^2+\int_0^\infty \alpha\{-2\alpha A_1(\alpha)-2[1-2\nu_1-\alpha z]B_1(\alpha)-$$

$$-c_1\alpha a_1(\alpha)\}\exp[-\alpha z]J_0(\alpha r)d\alpha \tag{1.11}$$

$$t_{zz}^{M(1)}(r,z)/\mu_1=\frac{1+2\chi_1}{2\mu_{r1}^2}b_c^2\{1-2\mu_{r1}\int_0^\infty \alpha^2 a_1(\alpha)J_0(\alpha r)\exp[-\alpha z]dz\}$$

2.Решение задачи. Введем функции скачка смещения и индуцированного магнитного поля в области трещины

$$u_r^{(1)}(r,0)-u_r^{(2)}(r,0)=\int_0^\infty\{y_1(\alpha)-(3-4\nu_1)y_2(\alpha)+c_1y_3(\alpha)+y_4(\alpha)-$$

$$-(3-4\nu_2)y_5(\alpha)+c_2y_6(\alpha)\}J_1(\alpha r)d\alpha=\int_0^\infty W_1(\alpha)J_1(\alpha r)d\alpha=\begin{cases}0 & r>a\\ \Delta u_r & r<a\end{cases}$$

$$u_z^{(1)}(r,0)-u_z^{(2)}(r,0)=\int_0^\infty\{y_1(\alpha)-y_2(\alpha)\}J_0(\alpha r)d\alpha=\int_0^\infty W_2(\alpha)J_0(\alpha r)d\alpha=$$

$$=\begin{cases}0 & r>a\\ \Delta u_z & r<a\end{cases}$$

$$h_r^{(1)}(r,0)-h_r^{(1)}(r,0)+\chi_r u_{zr}^{(1)}(r,0)=\int_0^\infty\{-\chi_r y_1(\alpha)-y_3(\alpha)+y_6(\alpha)\}\alpha J_1(\alpha r)d\alpha=$$

$$=\int_0^\infty \alpha W_3(\alpha)J_1(\alpha r)d\alpha=\begin{cases}0 & r>a\\ \Delta h_r & r<a\end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь

$y_1(\alpha)=\alpha A^{(1)}(\alpha);\ y_2(\alpha)=B^{(1)}(\alpha);\ y_3(\alpha)=\alpha a^{(1)}(\alpha);\ y_4(\alpha)=\alpha A^{(2)}(\alpha);$

$y_5(\alpha)=B^{(2)}(\alpha);\ y_6(\alpha)=\alpha a^{(2)}(\alpha)$

Из (1.5)-(1.6), с учетом (2.1), получим следующее алгебраическое уравнение:

$$\vec{A}\vec{Y}=\vec{\Phi} \tag{2.2}$$

В (2.2) приняты следующие обозначения:

$\lambda=0.5[(1+4\chi_1)/\mu_{r1}^2-(1+4\chi_2)/\mu_{r2}^2]$; $\delta(\alpha)$ -функция Дирака;

$c_j = 2(1-2\nu_j)\chi_j b_c^2/\mu_{rj}$, $c_{2+j} = -0.5[c_j + (1+2\chi_j)/\mu_{rj}]$,

$\chi_r = 1/\mu_{r1} - 1/\mu_{r2}$, $\mu_r = \mu_{r1}/\mu_{r2}$

$c_{4+j} = (-1)^j[1+(3-4\nu_j)\chi_j/\mu_{rj}]b_c^2/2$, $\mu = \mu_2/\mu_1$, $(j=1,2)$.

$$\hat{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -3+4\nu_1 & c_1 & 1 & 3-4\nu_2 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\chi_r & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1-2\nu_1 & c_3 & -\mu & -\mu(1-2\nu_2) & c_4 \\ -1 & 2(1-\nu_1) & c_5 & \mu & 2\mu(1-\nu_2) & c_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mu_r \end{Vmatrix}; \vec{\Phi} = \begin{Vmatrix} W_1(\alpha) \\ W_2(\alpha) \\ W_3(\alpha) \\ \lambda\delta(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}; \vec{Y} = \begin{Vmatrix} y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha) \\ y_3(\alpha) \\ y_4(\alpha) \\ y_5(\alpha) \\ y_6(\alpha) \end{Vmatrix}$$

Обращая равенство (2.2), получим

$$y_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} W_k(\alpha) + \lambda b_{i4}\delta(\alpha) \qquad (2.3)$$

где b_{ik}-элементы обратной матрицы к $\hat{A}$. Подставляя (2.3) в граничные условия (1.5), (1.7) и учитывая (2.1), получим следующую систему парных интегральных уравнений относительно неизвестных $W_k(\alpha)$, $(k=1,2,3)$:

$$\begin{cases} \int_0^\infty W_1(\alpha)J_1(\alpha r)d\alpha = 0 \\ \int_0^\infty W_2(\alpha)J_0(\alpha r)d\alpha = 0 \qquad \text{при} \qquad r > a \\ \int_0^\infty \alpha W_3(\alpha)J_1(\alpha r)d\alpha = 0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3}\beta_{ki}\int_0^\infty \alpha W_i(\alpha)J_1(\alpha r)d\alpha = 0, \qquad (k=1,2) \qquad r < a \\ \sum_{i=1}^{3}\beta_{3i}\int_0^\infty \alpha W_i(\alpha)J_0(\alpha r)d\alpha = Q_0 = -P_0 + \chi_1(2\chi_1 - 1)b_c^2/\mu_{r1} + \beta_{34}\lambda/2 \end{cases} \qquad (2.5)$$

где

$\beta_{1k} = -(2+\chi_1 b_c^2/\mu_{r1})b_{1k} + 4(1-\nu_1)b_{2k} + c_5^* b_{3k}$; $c_5^* = -(3-4\nu_1)\chi_1 b_c^2/\mu_{r1}$

$\beta_{2k} = -\chi_1 b_{1k}/\mu_{r1} + b_{3k} + \chi_r b_{4k}/\mu_r - b_{6k}$;

$\beta_{3k} = -2b_{1k} + 2(1-2\nu_1)b_{2k} - (c_1 - \chi_1^2 b_c^2/\mu_{r1})b_{3k}$; $(k=1,2,3)$

Введем вспомогательные функции $q(t)$, $p(t)$ с помощью соотношений

$$W_1(\alpha) = \int_0^a q(t)[\cos\alpha t - \cos\alpha a]dt; \; W_2(\alpha) = \int_0^a p(t)\sin\alpha t dt$$

$$W_3(\alpha) = \tau . W_2(\alpha) \qquad (2.6)$$

где $\tau_* = (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})/(\beta_{21}\beta_{13} - \beta_{11}\beta_{23})$. Нетрудно убедиться, что система уравнений (2.4) удовлетворяется тождественно, а система уравнений (2.5) эквивалентна системе двух интегральных уравнений относительно $p(t)$ и $q(t)$

$$\begin{cases} f_{11}\int\limits_0^r \frac{q(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} + f_{12}\int\limits_r^a \frac{p(t)dt}{\sqrt{t^2-r^2}} = c^*, & 0<r<a \\ f_{21}[\int\limits_0^a q(t)dt - \int\limits_r^a \frac{q(t)dt}{\sqrt{t^2-r^2}}] + f_{22}\int\limits_0^r \frac{tp(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = \frac{Q_0 r^2}{2} + f_{21}\int\limits_0^a q(t)dt[1-\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}] \end{cases} \quad (2.7)$$

где c^* – некоторая постоянная, значение которой будет определено ниже.

Отметим, что при выводе (2.7) использовались известные значения разрывных интегралов [1]

$$\int\limits_0^\infty J_0(\xi r)Sin\xi\eta d\xi = \begin{cases} 0, & \eta < r \\ (\eta^2 - r^2)^{-1/2}, & \eta > r \end{cases}$$

$$\int\limits_0^\infty J_0(\xi r)Cos\xi\eta d\xi = \begin{cases} 0, & \eta > r \\ (\eta^2 - r^2)^{-1/2}, & \eta < r \end{cases}$$

$$\int\limits_0^\infty J_1(\xi r)Cos\xi\eta d\xi = \begin{cases} 1/r, & \eta < r \\ [1-\eta(\eta^2 - r^2)^{-1/2}]/r, & \eta > r \end{cases}$$

$$\int\limits_0^\infty J_1(\xi r)Sin\xi\eta d\xi = \begin{cases} 0, & \eta > r \\ \eta(\eta^2 - r^2)^{-1/2}/r, & \eta > r \end{cases}$$

Применяя оператор $\frac{d}{d\tau}\int\limits_\tau^a r(....)(r^2-\tau^2)^{-1/2}dr$ к (2.7) и изменяя порядок интегрирования, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} f_{12}p_0(\tau) + \frac{f_{11}}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{q_0(\eta)d\eta}{\tau-\eta} = \frac{2c^*\tau}{\pi} \\ f_{22}q_0(\tau) - \frac{f_{21}}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{p_0(\eta)d\eta}{\tau-\eta} = \frac{Q_0(a^2-2\tau^2)}{\pi} \end{cases} \text{ при } -a<\tau<a \quad (2.8)$$

В (2.6)-(2.8) приняты обозначения:

$$p_0(\tau) = p(\tau)\sqrt{a^2-\tau^2}\,,\ q_0(\tau) = q(\tau)\sqrt{a^2-\tau^2}\,,\ f_{11} = \beta_{11}\,,\ f_{21} = \beta_{31}\,,$$

$$f_{22} = \beta_{32} + \tau_*\beta_{33},\ f_{12} = \beta_{12} + \tau_*\beta_{13}.$$

При выводе (2.8) учтены свойства $p(-\tau) = -p(\tau)$, $q(-\tau) = q(\tau)$.

Определим величины $g_1^2 = f_{11}f_{21}/f_{12}f_{22}$ и $g^2 = f_{11}f_{22}/f_{12}f_{21}$. При условии $g > 1$, система уравнений (2.8) запишется в виде

$$f_0(\tau) - g\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f_0(\eta)d\eta}{\eta-\tau} = \frac{2c^*\tau}{\pi} + \frac{iQ_0g_1(a^2-2\tau^2)}{\pi} \quad (2.9)$$

где $f_0(\tau)=p_0(\tau)+ig_1q_0(\tau)$. Решение интегрального уравнения (2.9) хорошо известно ([7]). Заметим что, интегральные уравнения типа (2.8) встречаются также при определении НДС около трещины для пьезоэлектрических и магнитоупругих сред ([1,7]). Отметим, что условие $g>1$ эквивалентно условию $b_e^2<b_m^2$. В таб. 1 приведены значения $10^5 b_m^2$ в зависимости от параметра μ при различных значениях ν_j, μ_{rj} $(j=1,2)$.

Таблица 1

μ	$\nu_1=0.25, \nu_2=0.35,$ $\mu_{r1}=\mu_{r2}=10^4$	$\nu_1=0.25, \nu_2=0.35,$ $\mu_{r1}=10^4, \mu_{r2}=10^3$	$\nu_1=0.25, \nu_2=0.45,$ $\mu_{r1}=\mu_{r2}=10^3$
0.7	11.41	6.48	1.01
1.4	16.02	7.83	1.21
2.1	19.08	8.22	2.78
2.8	21.03	8.43	2.05
3.5	22.25	8.62	2.26

Применяя известные методы решения интегрального уравнения (2.9) ([1,7]) получим

$$p_0(\tau)=\frac{2pg_1e^{\pi k}}{\pi g_{22}(g+1)}\left[\tau\cos\left(k\ln\frac{a-\tau}{a+\tau}\right)-ka\sin\left(k\ln\frac{a-\tau}{a+\tau}\right)\right] \tag{2.10}$$

$$q_0(\tau)=-\frac{2pe^{\pi k}}{\pi g_{22}(g+1)}\left[ka\cos\left(k\ln\frac{a-\tau}{a+\tau}\right)+\tau\sin\left(k\ln\frac{a-\tau}{a+\tau}\right)\right] \tag{2.11}$$

Для задачи определения НДС около трещины в пьезоэлектрической среде (рассмотренной в [1]), условие $g>1$ выполняется автоматически. Условие $g>1$ накладывает ограничение на магнитное поле, из которого следует, что функции (2.10)-(2.11) удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.8) лишь при условии $b_e^2<b_m^2$. Решение интегрального уравнения (2.9) в общем случае приведено в работе [7]. Заметим, что имеет место равенство $\int_0^a q(t)dt=0$. Отсюда следует, что скачки смещений на берегах трещины (определенные по формулам (2.1)) могут быть представлены в виде

$$\Delta u_z=\int_r^a\frac{p(t)dt}{\sqrt{t^2-r^2}};\quad \Delta u_r=-\frac{1}{r}\int_r^a\frac{tq(t)dt}{\sqrt{t^2-r^2}};\quad 0\le r<a \tag{2.12}$$

Суммарные магнитоупругие напряжения $t_{ij}^{(sum)}(r,z)/\mu_m=t_{ij}^{(m)}(r,z)/\mu_m+t_{ij}^{M}(r,z)/\mu_m$, с помощью формул (1.1) могут быть выражены через функции $p(t)$ и $q(t)$. Например,

$$t_{zz}^{(sum)}(r,z)/\mu_1=\frac{1+4\chi_1}{2\mu_{r1}^2}b_e^2-\frac{\lambda}{2}\theta_{14}+\sum_{k=1}^{3}\theta_{1k}^*\int_0^\infty\alpha W_k(\alpha)J_0(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha-$$

$$-2z\sum_{k=1}^{2}b_{2k}^{*}\int_0^{\infty}\alpha^2 W_k(\alpha)J_0(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha:\ t_{zz}^{c(1)}(r,z)/\mu_1=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\theta_{2k}^{*}\int_0^{\infty}\alpha W_k(\alpha)J_1(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha-2z\sum_{k=1}^{2}b_{2k}^{*}\int_0^{\infty}\alpha^2 W_k(\alpha)J_1(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha \quad (2.13)$$

где

$$\theta_{1k}=-2b_{1k}+2(1-2\nu_1)b_{2k}-c_1^0 b_{3k},\ \theta_{11}^{*}=\theta_{11},\ \theta_{12}^{*}=\theta_{12}+\tau.\theta_{13}$$

$$b_{22}^{*}=b_{22}+\tau.b_{23},\ \ b_{21}^{*}=b_{21},\ \ c_1^{0}=c_1+\frac{1+2\chi_1}{\mu_{r1}}b_c^2$$

$$\theta_{2k}=-2b_{1k}+4(1-\nu_1)b_{2k}+c_5^{*}b_{3k},\ \theta_{21}^{*}=\theta_{21},\ \theta_{22}^{*}=\theta_{22}+\tau.\theta_{23}$$

На плоскости $z=0$ будем иметь

$$t_{zz}^{c(1)}(r,0)/\mu_1=\frac{1+4\chi_1}{2\mu_{r1}^2}b_c^2-\frac{\lambda}{2}\theta_{14}+\theta_{11}^{*}R_1(r)+\theta_{12}^{*}R_2(r) \quad (2.14)$$

где

$$R_1(r)=\begin{cases}0, & r>a\\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\displaystyle\int_r^a\frac{tq(t)dt}{\sqrt{t^2-r^2}}, & r<a\end{cases};\qquad R_2(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\displaystyle\int_0^a\frac{tp(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}}, & r>a\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\displaystyle\int_0^r\frac{tp(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}}, & r<a\end{cases}$$

В общем случае из (2.14) можно найти КИ магнитоупругих напряжений

$$K_2^{*}=K_2^{*}(\nu_1,\nu_2,\mu,b_c^2\cdot\omega(\nu_1,\nu_2,\mu,\mu_{r1},\mu_{r2},b_c^2))=$$

$$=\frac{1}{a^{1/2}P_0}\lim_{r\to a+0}[2(r-a)]^{1/2}\frac{t_{zz}^{c(1)}(r,0)}{\mu}=-\frac{2}{\pi}\frac{Q_0 g e^{\pi k}\theta_{12}^{*}}{f_{22}(g+1)P_0} \quad (2.15)$$

где ω-функция зависящая от магнитного поля и физических параметров задачи, явный вид которой нетрудно восстановить. В общем случае коэффициент интенсивности определяются формулой [9,10]

$$K_I-iK_{II}=2\sqrt{2\pi}\exp(\pi\varepsilon)(r-a)^{0.5+i\varepsilon}(t_{zz}-it_{rz})$$

где параметр ε зависит от механических и физических свойств пространств.

В качестве примера рассмотрим однородный случай (т.е. $f_{12}=f_{21}=0$). Из (2.13) и (2.8) имеем

$$q(t)=0;\ p(t)=\frac{2Q_0 t}{\pi f_{22}},\ W_1(\alpha)=0;\ W_2(\alpha)=-\frac{2Q_0}{\pi f_{22}}\left(\frac{\sin\alpha a}{\alpha}\right)_{,\alpha} \quad (2.16)$$

Выражение для $t_{zz}^{c(1)}(r,0)/\mu_1$ принимает вид

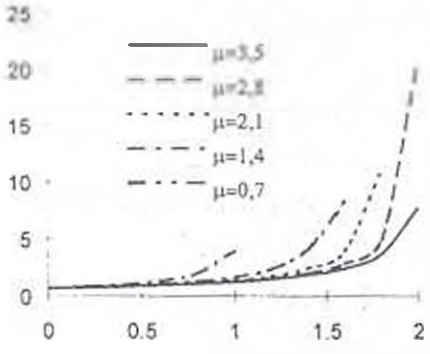
$$t_{zz}^{c(1)}(r,0)/\mu_1=\frac{1+4\chi_1}{2\mu_{r1}^2}b_c^2-\frac{\lambda}{2}\theta_{14}+\theta_{12}^{*}\frac{2Q_0}{\pi f_{22}}\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & r<a\\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{2\sqrt{r^2-a^2}}, & r>a\end{cases} \quad (2.17)$$

Коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений определяется формулой

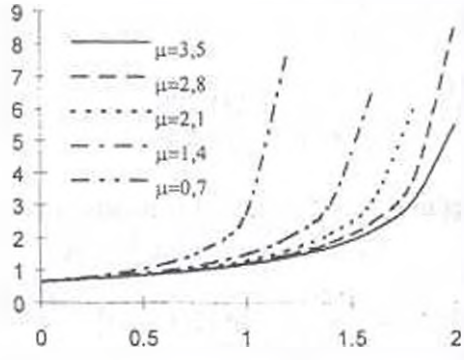
$$K_2^* = \frac{1}{P_0 a^{1/2}} \lim_{r \to a+0} \sqrt{2(r-a)}\, t_{\infty}^{(1)} / \mu_1 = -\frac{Q_0 \theta_{12}^*}{\pi P_0 f_{22}} \qquad (2.18)$$

Формулы (2.16)- (2.18) ранее, иным путем, получены в работе [3].

3.**Численные результаты**. На основе формул (2.8)-(2.18), произведен численный анализ магнитоупругих напряжений около трещины. Ниже, магнитное поле B_0 выбирается так, чтобы выполнялось условие $g > 1$. Значение P_0 считается равным 0.001. Параметр $\mu = \mu_2 / \mu_1$ выбран из интервала $0 < \mu < 3.5$. Для обычных магнитомягких ферромагнитных материалов, магнитная проницаемость $\mu_j, (j = 1,2)$ меняется в пределах $(10 \div 10^6)$ ([2-6, 8]). В чисто упругом случае (при отсутствии магнитного поля, т.е. $b_c^2 = 0$) КИ задачи $K_2^*(\nu_1, \nu_2, \mu, 0)$, будем обозначать через K_2^{**}. На фиг. 1-2 приведены значения K_2^* в зависимости от b_c^2.



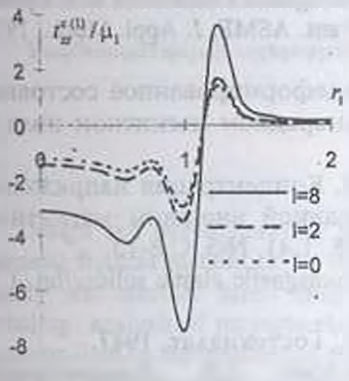
Фиг.1 Зависимость коэффициента интенсивности K_2^* от магнитного поля ($\nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.35, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5$)



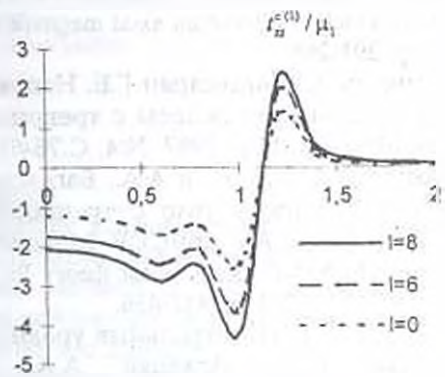
Фиг.2 Зависимость коэффициента интенсивности K_2^* от магнитного поля ($\nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.45, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5$)

Из численных расчетов видно, что: а) когда параметр μ монотонно убывает, K_2^* монотонно возрастает; б) с увеличением ν_2 КИ K_2^* убывает; в) с увеличением $\mu_j\ (j = 1,2)$, K_2^* увеличивается. В частности, из фиг. 1-2 видно, что при $\mu = 0.7, \nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.45$, $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5$ и довольно слабых магнитных полях $B_0 \sim 3 Tesla$ (в этом случае $b_c^2 \sim 10^{-5}$) имеет место $K_2^* \approx 4.5 K_2^{**}$. Т.е. значение КИ с учетом магнитного поля 4.5 раза больше, чем значение КИ для чисто упругой задачи. Численные расчеты показывают также, что при $b_c^2 \to b_{c*}^2$ (b_{c*}^2 -корень уравнения $g - 1 = 0$) КИ $K_2^* \to \infty$. В случае однородной задачи на этот факт обратил внимание Y. Shindo в работе [2]. Для конечных сред, КИ с увеличением магнитного поля монотонно возрастает и начиная с

некоторого значения магнитного поля резко снижается, стремясь к нулю [5]. То есть учет конечности среды приводит к тому, что КИ как функция от b_*^2 ограничена. Исследовано также влияние магнитного поля и физических параметров $(\mu, \nu_j, \mu_{rj}\ (j=1,2))$ на магнитоупругие напряжения около трещины (фиг.3 – для $b_*^2 = l\cdot 10^{-6}, \nu_1 = 0.25,\ \nu_2 = 0.45$ $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5,\quad \mu = 0.7,\ z_1 = 0.1)$, фиг.4 – $b_*^2 = l\cdot 10^{-6}, \nu_1 = 0.25$ $\nu_2 = 0.35,\ \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5,\ \mu = 2.1,\ z_1 = 0.1$). При численных расчетах выбраны $z_1 = z/a = 0.1,\ P_0 = 10^{-3}$. Магнитоупругие напряжения сравниваются с чисто упругими напряжениями (т.е когда $b_*^2 = 0$)



Фиг.3 Зависимость магнитоупругого напряжения t_{zz}^c/μ_1 от r_1.



Фиг.4 Зависимость магнитоупругого напряжения t_{zz}^c/μ_1 от r_1.

Численные расчеты показывают, что: а) с увеличением параметра μ магнитоупругое напряжение $t_{zz}^{c(1)}/\mu_1$ монотонно увеличивается, когда $r_1 \in (0,1)$ и монотонно убывает при $r/a \in (1,+\infty)$; б) при $r/a > 1.5$ величина $t_{zz}^{c(1)}/\mu_1$ практически становится нулем; в) с увеличением ν_2 значение модуля $t_{zz}^{c(1)}/\mu_1$ увеличивается; г) с уменьшением параметра μ_{rj} значение модуля магнитоупругого напряжения $t_{zz}^{c(1)}/\mu_1$ монотонно убывает; д) эффект магнитного поля тем сильнее, чем больше величина μ_{rj}; е) с увеличением параметра b_*^2 значение модуля магнитоупругого напряжения увеличивается.

4. Обсуждение результатов. На основе линеаризированных уравнений магнитоупругости, предложенной в работе [6], исследовано НДС кусочно-однородного пространства с трещиной. Магнитоупругие напряжения и КИ магнитоупругих напряжений определены аналитически. Показано, что магнитоупругие напряжения на конце трещины имеют особенности типа $r^{-1/2+ik}$, где $k = k(b_*^2, \nu_1, \nu_2, \mu, \mu_{r1}, \mu_{r2})$. Численные расчеты показывают, что величина k существенно зависит от магнитного поля и физических параметров задачи. Значение КИ в довольно слабых

магнитных полях ($B_0 \sim 1 \div 3\ Tesla$) несколько раз больше, чем значение КИ для чисто упругой задачи. Полученные результаты верны для магнитных полей, удовлетворящих условию $b_z^2 < b_{cr}^2$. Таким образом, в неоднородных магнитоупругих средах магнитное поле существенно влияет на НДС около трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988, 470 с.
2. Shindo Y., Singular stresses in a soft ferromagnetic solid with a flat annular crack. //Acta Mech., 1983, 50, pp. 50-56.
3. Shindo Y., Magnetoelastic interaction of a soft ferromagnetic elastic solid with a penny shaped crack in a constant axial magnetic field.//Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1978. 45, pp. 291-296.
4. Асанян Д.Д., Багдасарян Г.Е. Напряженно-деформированное состояние ферромагнитной полосы с трещиной в однородном магнитном поле.// Изв.АН РФ. МТТ. 1997. №4. С.78-87.
5. Асанян Д.Д., Асланян А.А., Багдасарян Г.Е. Концентрация напряжений в магнитомягком теле с трещиной, вызванной внешним магнитным полем.// Изв. АН АрмССР. Механика, 1988. Т.41, №5. С.8-13.
6. Pao Y.-H., Yeh C.-S., A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids.//Int. J. of Eng. Sci., 11, 1973, pp.415-436.
7. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1947.
8. Асанян Д.Д., Асланян А.А., Багдасарян Г.Е. Концентрация магнитоупругих напряжений и индукционного магнитного поля в магнитном поле. Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. №2. С. 10-19.
9. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Справочное пособие. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1988. С. 537.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.08.2000