УДК 539.3.01

ИЗГИБ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ,
ПОДКРЕПЛЕННОЙ НА КОНЕЧНОМ УЧАСТКЕ
ВКЛЮЧЕНИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ
Շավլակաձե Н.Н.

Ն.Ն. Շավլակաձե

Վերջավոր մասում ամրացված փոփոխական կոշտության ներդիրով անիզոտրոպ սալի ծոռուը

Աշխատանքում դիտարկվում է փոփոխական կոշտության ներդիրով անվերջ ամիզոտրոպ սալի ծոռան կոնտակտային խնդիրը Ներդիրի և սալի փողզողեցության անհայտ ճիզի նկատմամբ ստացվում է Պրանդտլի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում: Անալիտիկ ֆունկցիաների մերողներով, ներդիրի կոշտության փոփոխության որոշակի օրենքի դեպքում, այդ հավասարման լուծումը ներկայացվում է քաղաքայտ տեսքով: Ստացված է ներդիրի ծայրերում կոնտակտային ճիզի եզակիության կարգի նվազեցում:

N.N. Shavlakadze

Bending of Elastic Anisotrope Plate, Reinforced on a Finite Site by Inclusion of Variable Rigidity

В работе рассматривается контактная задача изгиба бесконечной анизотропной пластинки с упругим включением переменной изгибной жесткости. Относительно неизвестного контактного усилия взаимодействия включения с пластинкой получается интегро-дифференциальное уравнение Прандтля. С применением методов теории аналитических функций решение этого уравнения представляется в явном виде, при изменении жесткости включения специальным законом. Достигается уменьшение порядка особенности контактного усилия в конце включения.

Контактные задачи взаимодействия упругих изотропных пластин с тонкими упругими элементами, в виде стрингеров и включений, а также связанные с ними библиографические справки изложены в работах [1-4]. Показано, что контактные напряжения вблизи концов накладки постоянного поперечного сечения имеют особенность порядка квадратного корня, такое же поведение контактных напряжений остается в случае, когда поперечное сечение накладки изменяется по эллиптическому закону [5]. Для упругого изотропного клина, подкрепленного на конечном участке стержнем, площадь поперечного сечения которого изменяется по линейному закону, построено решение в [6], а для анизотропной полубесконечной пластинки – в [7]. Доказывается, что контактное напряжение вблизи тонкого конца накладки имеет особенность порядка меньше $1/2$, а в случае, когда поперечное сечение накладки изменяется по параболическому закону, контактное напряжение вблизи тонкого конца накладки становится ограниченным [8].

Контактные задачи об изгибе изотропных пластин, подкрепленных тонкими включениями (жесткими или упругими), рассмотрены в работах [9 – 12]. Эти задачи сводятся к интегральным уравнениям со специальной характеристической частью, решения которых ищутся в классе неинтегрируемых функций.

Нами исследованы контактные задачи для конечных или бесконечных пластин с упругими накладками переменной толщины (переменной изгибной жесткости) [13–15], относительно неизвестных контактных напряжений получается интегро-дифференциальное уравнение, характеристической частью которого является интегро-дифференциальное уравнение типа Прандтля. Это уравнение в некоторых условиях изучено в [16–17], но когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль любого порядка в концах линии интегрирования, уравнение качественно изменяется, в частности, оно эквивалентно сводится к сингулярному интегральному уравнению третьего рода.

В данной работе рассмотрим упругую анизотропную пластинку под действием изгибающих моментов на бесконечности: $M_x^* = M$, $M_y^* = 0$. По линии: $y = 0$, $0 < x < 1$ она подкреплена тонким упругим включением переменной изгибной жесткости $D_0(x)$. Требуется найти контактные усилия взаимодействия включения с пластинкой.

Наличие подкрепляющего включения вызывает скачок обобщенной поперечной силы N_y в пластинке. Используя обозначение: $\langle f \rangle = f(x, -0) - f(x, +0)$, имеем:

$$\langle W \rangle = \langle W_y' \rangle = \langle M_y \rangle = 0, \quad \langle N_y \rangle = \mu(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

где W – прогиб пластинки, W_y' , M_y , N_y – соответственно угол поворота, изгибающий момент и обобщенная поперечная сила в пластинке, $\mu(x)$ – неизвестное контактное усилие взаимодействия включения с пластинкой, причем $\mu(x) = 0$ при $x \in (0, 1)$ и удовлетворяет условиям равновесия включения:

$$\int_0^1 \mu(t) dt = 0, \quad \int_0^1 t \mu(t) dt = -M_1 + M_2 \quad (2)$$

где M_1 и M_2 – неизвестные моменты на концевых сечениях $x = 0$ и $x = 1$ соответственно.

Относительно прогиба включения $\omega_0(x)$ получается следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} D_0(x) \frac{d^2}{dx^2} \omega_0(x) &= -\mu(x), \quad 0 < x < 1 \\ D_0(x) \omega_0''(x) \Big|_{x=0} &= M_1, \quad D_0(x) \omega_0''(x) \Big|_{x=1} = M_2 \\ [D_0(x) \omega_0'(x)] \Big|_{x=0} &= 0, \quad [D_0(x) \omega_0'(x)] \Big|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где $D_0(x) = E_0(x) h_0^3(x) / 12$ – жесткость включения на изгиб, $h_0(x)$ – толщина, а $E_0(x)$ – модуль Юнга материала включения.

Как известно, [18], напряженное состояние тонкой анизотропной

пластинки определяется прогибом средней плоскости $W(x, y)$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

Осуществляя условие контакта включения с пластинкой

$$W(x, 0) = \omega_0(x) \quad (5)$$

решение краевой задачи (1–5) будем искать в классе функций $W(x, y)$, имеющих вторые производные, ведущих себя как $r^{-1/2}$ при приближении к точкам $(0, 0)$ и $(1, 0)$ и ограниченных на бесконечности.

Общее выражение для функции $W(x, y)$ зависит от корней μ_1, μ_2 , $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ соответствующего характеристического уравнения:

$$W = 2 \operatorname{Re}[W_1(z_1) + W_2(z_2)], \quad (\mu_1 \neq \mu_2) \quad (6)$$

где $W_1(z_1)$ и $W_2(z_2)$ – произвольные аналитические функции комплексных переменных; $z_1 = x + \mu_1 y$, $z_2 = x + \mu_2 y$, μ_1 и μ_2 – комплексные или чисто мнимые постоянные: $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = \gamma + i\delta$.

Общие выражения для моментов и перерезывающих сил (при $\mu_1 \neq \mu_2$) имеют вид:

$$\begin{aligned} M_x &= -2 \operatorname{Re}[p_1 W_1'(z_1) + p_2 W_2'(z_2)] \\ M_y &= -2 \operatorname{Re}[q_1 W_1'(z_1) + q_2 W_2'(z_2)] \\ M_{xy} &= -2 \operatorname{Re}[r_1 W_1'(z_1) + r_2 W_2'(z_2)] \\ N_x &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 s_1 W_1''(z_1) + \mu_2 s_2 W_2''(z_2)] \\ N_y &= -2 \operatorname{Re}[s_1 W_1''(z_1) + s_2 W_2''(z_2)] \end{aligned} \quad (7)$$

где $p_i = D_{11} + D_{12}\mu_i^2 + 2D_{16}\mu_i$, $q_i = D_{12} + D_{22}\mu_i^2 + 2D_{26}\mu_i$,

$r_i = D_{16} + D_{26}\mu_i^2 + 2D_{66}\mu_i$, $s_i = D_{11}/\mu_i + 3D_{16} + (D_{12} + 2D_{66})\mu_i + D_{26}\mu_i^2$,
 $s_i - r_i = p_i/\mu_i$, $s_i + r_i = -q_i\mu_i$, $i = 1, 2$

Функции $W_1'(z_1)$ и $W_2'(z_2)$, для пластинки с отверстием, когда усилия, распределенные по краям отверстия, уравновешиваются, в окрестности бесконечно удаленной точки имеют вид:

$$W_1'(z_1) = Bz_1 + \overset{0}{W}_1'(z_1), \quad W_2'(z_2) = (B' + iC')z_2 + \overset{0}{W}_2'(z_2) \quad (8)$$

где $\overset{0}{W}_1'(z_1)$, $\overset{0}{W}_2'(z_2)$ – функции, голоморфные вне отверстия, включая бесконечно удаленную точку. Моменты на бесконечности выражаются через постоянные B, B', C' :

$$\begin{aligned} M_x^\infty &= -\operatorname{Re}[p_1 B + p_2 (B' + iC')], \quad M_y^\infty = -\operatorname{Re}[q_1 B + q_2 (B' + iC')] \\ M_{xy}^\infty &= -\operatorname{Re}[r_1 B + r_2 (B' + iC')], \quad N_x^\infty = 0, \quad N_y^\infty = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

В силу формулы (6) имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2 \operatorname{Re}[W_1'(z_1) + W_2'(z_2)]$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2 \operatorname{Re}[\mu_1 W_1'(z_1) + \mu_2 W_2'(z_2)]$$

и, с учетом (7), условия (1) дают:

$$\langle W_1'(x) + W_2'(x) + \overline{W_1'(x)} + \overline{W_2'(x)} \rangle = 0$$

$$\langle \mu_1 W_1'(x) + \mu_2 W_2'(x) + \bar{\mu}_1 \overline{W_1'(x)} + \bar{\mu}_2 \overline{W_2'(x)} \rangle = 0$$

$$\langle q_1 W_1''(x) + q_2 W_2''(x) + \bar{q}_1 \overline{W_1''(x)} + \bar{q}_2 \overline{W_2''(x)} \rangle = 0$$

$$\langle s_1 W_1'''(x) + s_2 W_2'''(x) + \bar{s}_1 \overline{W_1'''(x)} + \bar{s}_2 \overline{W_2'''(x)} \rangle = \mu(x), \quad 0 < x < 1$$

Продифференцировав первое и второе равенства два раза, а третье — один раз, относительно скачков $\langle W_1''(x) \rangle, \langle W_2''(x) \rangle, \langle \overline{W_1''(x)} \rangle, \langle \overline{W_2''(x)} \rangle$, получается система алгебраических уравнений.

Если детерминант этой системы отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 \\ q_1 & q_2 & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 \\ s_1 & s_2 & \bar{s}_1 & \bar{s}_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

получим следующие краевые условия:

$$[W_1'''(x)]^- - [W_1'''(x)]^+ = -\frac{\Delta_1}{\Delta} \mu(x)$$

$$[W_2'''(x)]^- - [W_2'''(x)]^+ = -\frac{\Delta_2}{\Delta} \mu(x), \quad 0 < x < 1$$

(11)

где $[W_i'''(x)]^\pm$ ($i=1,2$) — граничные значения аналитических функций $W_i'''(z_i)$, ($i=1,2$) из верхней и нижней полуплоскостей соответственно.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_2 & \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 \\ q_2 & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 \\ q_1 & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 \end{vmatrix}$$

Функция $\mu(x)$ может иметь неинтегрируемые особенности на сегменте $[0,1]$, учитывая проведенные в [11] доказательства о перенесении результатов монографии [19] на регуляризованные значения расходящихся интегралов [20], учитывая, что $W_1'''(\infty) = W_2'''(\infty) = 0$, решения граничных задач (11) представляются в виде:

$$W_1'''(z_1) = \frac{\Delta_1}{2\pi i \Delta} \int_0^1 \frac{\mu(t) dt}{t - z_1}, \quad W_2'''(z_2) = \frac{\Delta_2}{2\pi i \Delta} \int_0^1 \frac{\mu(t) dt}{t - z_2}$$

где z_1 и z_2 — комплексные переменные, изменяющиеся соответственно в областях S_1 и S_2 [18], разрезанных вдоль отрезка $(0, 1)$.

В силу формул (8), функции $W_1(z_1)$ и $W_2^*(z_2)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} W_1(z_1) &= \frac{\Delta_1}{2\pi i \Delta} \int_0^1 \ln|t - z_1| \mu(t) dt + B \\ W_2^*(z_2) &= \frac{\Delta_2}{2\pi i \Delta} \int_0^1 \ln|t - z_2| \mu(t) dt + B' + iC' \end{aligned} \quad (12)$$

Постоянные B , B' и C' определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} (p_1 + \bar{p}_1)B + p_2 B_1 + \bar{p}_2 \bar{B}_1 &= -M \\ (q_1 + \bar{q}_1)B + q_2 B_1 + \bar{q}_2 \bar{B}_1 &= 0 \\ (r_1 + \bar{r}_1)B + r_2 B_1 + \bar{r}_2 \bar{B}_1 &= 0, \quad B_1 = B' + iC' \end{aligned}$$

Осуществляя условие контакта (5) включения с пластинкой, имея в виду, что $\partial^2 W(x, 0) / \partial x^2 = 2 \operatorname{Re}[W_1'(x) + W_2^{*'}(x)]$, с учетом (12), условие (3) будет иметь вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} D_0(x) \left[\frac{\lambda_0}{\pi} \int_0^1 \ln|t - x| \mu(t) dt + B + B' \right] = -\mu(x), \quad 0 < x < 1$$

где $\lambda_0 = \operatorname{Im} \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta}$.

Интегрируя последнее уравнение два раза и вводя обозначение

$\lambda(x) = - \int_0^x dt \int_0^t \mu(s) ds$, приходим к уравнению

$$\lambda(x) - \frac{\lambda_0}{\pi} D_0(x) \int_0^1 \frac{\lambda'(t) dt}{t - x} = -(B + B') D_0(x), \quad 0 < x < 1 \quad (13)$$

при условии

$$\lambda(0) = 0, \lambda(1) = -M_1 + M_2, \lambda'(0) = \lambda'(1) = 0 \quad (14)$$

Моменты M_1 и M_2 на концевых сечениях включения определяются из следующих соотношений:

$$M_1 = \int_{-\lambda_0(1)/2}^{\lambda_0(0)/2} M_x(0, y) dy, \quad M_2 = \int_{-\lambda_0(1)/2}^{\lambda_0(1)/2} M_x(1, y) dy \quad (15)$$

В работе [15] доказана теорема, из которой следует справедливость следующей теоремы:

Если в задаче (1-5) изгибная жесткость включения изменяется законом: $D_0(x) = x^\alpha b(x)$, ($b(x) > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq x \leq 1$), то контактное усилие взаимодействия включения с пластинкой в окрестности точки $x = 0$ имеет следующее поведение:

$$\langle N, \rangle \equiv \mu(x) = \begin{cases} O(x^{-3/2}) & \text{при } 0 \leq \alpha < 1 \\ O(x^{-2+\delta_0}) & \text{при } \alpha = 1, \delta > 1/2 \\ O(x^{-1}) & \text{при } 1 < \alpha \leq 2 \\ O(x^{\alpha-3}) & \text{при } \alpha > 2 \end{cases}$$

Пусть изгибная жесткость включения изменяется законом: $D_0(x) = D_0 x^2$, $D_0 = \text{const}$, $0 < x < 1$. Производя замену переменных:

$$x = \frac{1}{1+e^\xi}, \quad t = \frac{1}{1+e^\xi}, \quad \lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{1+e^\xi}\right) = \psi(\xi) \quad (16)$$

уравнения (13), (14) принимают вид:

$$e^\xi \psi(\xi) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(\zeta) d\zeta}{1-e^{\zeta-\xi}} = \tilde{M}_1 \frac{e^\xi}{1+e^\xi} - \tilde{M}_2 \frac{e^\xi}{(1+e^\xi)^2}, \quad -\infty < \xi < \infty$$

$$\psi(-\infty) = M_2 - M_1, \quad \psi(\infty) = 0 \quad (17)$$

где $\lambda = \lambda_0 D_0$, $\tilde{M}_1 = \lambda(M_1 - M_2)/\pi$, $\tilde{M}_2 = (B + B')D_0$.

Произведем преобразование Фурье обеих частей уравнения (17), где в качестве параметра рассмотрим комплексную переменную $s = s_0 - i\varepsilon$ (ε — сколь угодно малое положительное число). После некоторых преобразований уравнение (17) сводится к условию задачи типа Карлемана для полосы:

$$\Psi(s-i) + \lambda s \text{cth}\pi s \Psi(s) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{M}_2 \frac{s}{\text{sh}\pi s} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{M}_1 i \frac{1}{\text{sh}\pi s},$$

$$-\infty - i\varepsilon < s < +\infty - i\varepsilon \quad (18)$$

где $\Psi(s)$ — преобразование Фурье функции $\psi(\xi)$.

Требуется найти функцию $\Psi(z)$, голоморфную в полосе $-1 - \varepsilon < \text{Im } z < -\varepsilon$, непрерывную на границе полосы и удовлетворяющую условию (18).

Представим функцию $s \text{cth}\pi s$ в таком виде:

$$G(s) \equiv s \text{cth}\pi s = i s \text{cth}\pi s \text{th} \frac{\pi}{2} s \frac{\text{sh}[\pi(s-i)/2]}{\text{sh}(\pi s/2)} = i s G_0(s) \frac{\text{sh}[\pi(s-i)/2]}{\text{sh}(\pi s/2)}$$

Ввиду того, что $\text{Ind } G_0(s) = \text{Ind}(\text{cth}\pi s \text{tg}(\pi s/2)) = 0$, функция $G_0(s)$ может быть представлена в виде [21]: $G_0(s) = \chi_0(s-i)/\chi_0(s)$.

$$\text{где } \chi_0(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2i} \int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} \ln[G_0(s)] \text{cth}\pi(s-z) ds \right\}.$$

Тогда решение поставленной задачи можно представить в виде:

$$\Psi(z) = \frac{\chi(z)}{2z} \int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} \frac{F(s)(1+is)ds}{\chi(s)\text{sh}\pi(s-z)}, \quad -1 - \varepsilon < \text{Im } z < -\varepsilon \quad (19)$$

где $\chi(z) = \chi_0(z) \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} z \chi_1(z)$, $\chi_1(z) = \exp(iz \ln \lambda) \Gamma(1 + iz)$

$$F(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{M}_2 \frac{z}{\operatorname{sh} \pi z} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{M}_1 i \frac{1}{\operatorname{sh} \pi z}.$$

С применением асимптотической оценки Стирлинга для Гамма-функции, функция $\chi(z)$ в указанной полосе допускает оценки: $A_1 |t|^{i/2} < |\chi(t + i\tau)| < A_2 |t|^{i/2}$, $-\infty - i\varepsilon < t < +\infty - i\varepsilon$, $-1 - \varepsilon < \tau < -\varepsilon$.

Так как функция $F(z)$ экспоненциально исчезает на бесконечности, легко доказать, что и функция $\Psi(z)$, представленная формулой (19), обладает указанным свойством. Кроме того, в точке $z = -i$ она имеет полюс первого порядка.

Применяя эти свойства функции $\Psi(z)$, по формуле Коши получаем:

$$\begin{aligned} \psi''(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} s^2 \Psi(s) e^{-i\xi s} ds = \\ &= c e^{-i\xi} - \frac{e^{-(1+i\varepsilon)\xi}}{2\pi} \int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} (s - i - i\varepsilon) \Psi(s - i - i\varepsilon) e^{-i\xi s} ds \end{aligned}$$

где c — некоторая постоянная.

Так как $\lambda''_0(y) = [\psi''(\ln y) - \psi'(\ln y)]/y^2$, следовательно, функция $\lambda''_0(y)$ при достаточно больших y допускает оценки: $\lambda''_0(y) = O(y^{-3})$, $y \rightarrow \infty$, а для скачка обобщенной поперечной силы V_y имеем:

$$\langle V_y \rangle = \mu(x) = \lambda''(x) = O(x^{-1}), \quad x \rightarrow 0 \quad (20)$$

Таким образом, в рассмотренном случае относительно функции $D_0(x)$, задача (1-5) решается в квадратурах, решение получается обратным преобразованием Фурье от функции $\Psi(z)$, представленной формулой (19), а асимптотическое поведение искомой функции $\mu(x)$ дается формулой (20).

Заметим, что в наших условиях постановки задачи можно взять $h_0(0) = 0$, и соответственно из (15) следует: $M_1 = 0$, а M_2 определяется из второй формулы (15) с учетом (7), (12), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // ПММ. 1968. Т.32. №4. С.632-646.
2. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15-37.
3. Абрамян Б.Л. О некоторых результатах, полученных армянскими

- исследователями в области теории упругости и пластичности //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1976. Т.29. №1. С.12–26.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
 5. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением //ПММ. 1970. Т.34. №3. С.412–422.
 6. Нуллер Б.М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения //Изв.АН СССР. МТТ. 1972. №5. С.150–155.
 7. Гоголаури Л.А. Упругая анизотропная пластинка, подкрепленная на конечном участке стержнем переменного сечения //Сообщ. АН ГССР. 1985. Т.119. №3. С.489–492.
 8. Шавлакадзе Н.Н. Упругая изотропная полуплоскость, подкрепленная конечным стержнем переменного сечения //Сообщ. АН ГССР. 1988. Т.130. №3. С.509–512.
 9. Онищук О.В., Попов Г.Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями //Изв.АН СССР. МТТ. 1980. №4. С.141–150.
 10. Онищук О.В., Попов Г.Я., Процеров Ю.С. О некоторых задачах для подкрепленных пластин //ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.307–314.
 11. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями //ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.293–302.
 12. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
 13. Shavlakadze N. On some contact problem for bodies with elastic inclusion //Georg.Math. J., 5(1998), №3, 285–300.
 14. Shavlakadze N. A contact problem of the Interaction of Semi-Finite inclusion with a plate //Georg. Math. J. 6(199), №5, 489–500.
 15. Shavlakadze N. On singularities of contact stress upon tension and bending of plates with elastic inclusion // Proc. of A. Razmadze Math.Inst. 120 (1999), 135–147.
 16. Векуа И.Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля //ПММ. 1945. Т.9. №2. С.143–150.
 17. Магнарадзе Л.Г. Об одном интегральном уравнении теории крыла самолета //Сообщ. АН ГССР. 1942. Т.3. №6. С.503–508.
 18. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 355 с.
 19. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
 20. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
 21. Банцури Р.Д. Об одной граничной задаче теории аналитических функций //Сообщ. АН Груз.ССР. 1974. Т.73. №3. С.549–552.

Институт математики
им. А.Размадзе НАН Грузии

Поступила в редакцию
26.12.2000