ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **54, №1, 2001** Механика

УДК 517.52:539.3

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ

Сейранян С.П.

Ս.Պ. Սեյրանյան
Ընդլայնական ուժով ուղղանկյուն իզոտրոպ սալի ծռման խնդրում զուգամիտության արագացումը

Եռանկյունաչափական շարքերի (ե.շ.) բազմապատկումով Էյլերի n-րդ կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամով և $\sin^n(x)$ ֆունկցիայի վրա բաժանելով, որտեղ x-ը՝ ե.շ. փոփոխականն է, ստացված են ե.շ. զուգամիտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները ու ե.շ. զուգամիտության արագացման ճշգրիտ և էֆեկտիվ մեթոդ: Ստացված է Ա.Դադուի մեթոդի մեկ նոր դուրս բերում: Հաստատված է թեորեմ ե.շ. նշված մեթոդով զուգամիտության արագացման մասին: Արագացվում է ուղղանկյուն, իզոտրոպ, հոդակապորեն ամրացված, հաստության առանցքով ուժով բեռնավորված սալի ծռման խնդրի ճկվածքի համար հայտնի ե.շ.. Լարվածա-դեֆորմացված վիճակի մեծությունները ներկայացվում են բացահայտ և հաշվարկի համար մատչելի տեսքով:

S.P. Seyranian
An acceleration of convergence in the problem of bending of the rectangular isotropic plate under transversal force

Умножением тригонометрических рядов (т.р.) на тригонометрические полиномы Эйлера n-го порядка с делением на $\sin^n(x)$, где x – аргумент ряда, получены необходимые и достаточные условия сходимости т.р. и точный эффективный метод ускорения сходимости т.р. Приводится еще один вывод метода А.Даду. Ускоряется известный т.р. прогиба прямоугольной изотропной шарнирно-опертой пластины при изгибе поперечной силой. Представляются в явном и доступном для вычислении виде величины напряженно-деформированного состояния пластины.

Теория тригонометрических рядов (т.р.) возникла при решении задачи о колебаниях струны [1] и, впоследствии, способствовала бурному развитию естествознания [2]. Наряду с быстросходящимися т.р. нередко встречаются медленно сходящиеся т.р., которые возникают как при непосредственном получении решений в таких рядах [3] , так и при численном обращении преобразования Лапласа, Мелина, при быстром преобразовании Фурье [4],[5]. Необходимость точного вычисления названных рядов привела к возникновению и развитию эффективных методов ускорения сходимости т.р. [3, 5-8 и др.]. Возникли и качественно новые приложения данных методов к проблеме собственных значений, при решении линейных и нелинейных систем [9].

1. С применением тригонометрических полиномов Эйлера [10] представлен вывод тождественного аналитического преобразования нечетной итерации для т.р.

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx\,, \quad -\infty < x < \infty \tag{1.1}$$

при допущениях

$$x \neq \pm k\pi,\ k = 0,1,\ldots \text{ и } a_k \to 0 \text{ при } k \to \infty \tag{1.2}$$

$$c(x)=\frac{1}{\sin^{2n-1}x}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k \sin\,(2(n-k)-1)x\times$$

$$\times\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}a_m\cos mx=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\sin^{2n-1}x}\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k a_m\times$$

$$\times\left[\sin(2(n-k)-1+m)x+\sin(2(n-k)-1-m)x\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\sin^{2n-1}x}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k\left\{\sum_{\nu=2(n-k)-1}^{N+2(n-k)-1}a_{\nu-2(n-k)+1}\sin\nu x+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{2(n-k)-1}a_{2(n-k)-\nu-1}\sin\nu x-\sum_{\nu=1}^{N-2(n-k)+1}a_{\nu+2(n-k)-1}\sin\nu x\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\sin^{2n-1}x}\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{N-2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k\left[\left(1+\delta_{2(n-k)-1,\nu}\right)\times\right.\right. \tag{1.3}$$

$$\left.\times a_{|\nu-2(n-k)+1|}-a_{\nu+2(n-k)-1}\right]\sin\nu x+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{\nu=N-2n+2}^{N+2(n-k)-1}\left(1+\delta_{2(n-k)-1,\nu}\right)a_{|\nu-2(n-k)+1|}\sin\nu x-\sum_{\nu=N-2n+2}^{N-2(n-k)+1}a_{\nu+2(n-k)-1}\sin\nu x\right]\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\sin^{2n-1}x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k\left[\left(1+\delta_{2(n-k)-1,\nu}\right)a_{|\nu-2(n-k)+1|}-a_{\nu+2(n-k)-1}\right]\sin\nu x$$

Т.р.-ы слева и справа в (1.3) сходятся (расходятся) одновременно.

2. Приводится вывод тождественного аналитического преобразования четной итерации т.р. (1.1) при условиях (1.2) [10]

$$c(x)=\frac{1}{2^{2n}\sin^{2n}x}\left[C_{2n}^n+(-1)^n 2\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n}^k\cos 2(n-k)x\right]\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}a_m\cos mx=$$

$$=\frac{1}{2^{2n}\sin^{2n}x}\lim_{N\to\infty}\left\{C_{2n}^n\sum_{m=0}^{N}a_m\cos mx+(-1)^n\sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n}^k\left[\cos(2(n-k)-m)x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos(2(n-k)+m)x\right]a_m\right\}=\frac{1}{2^{2n}\sin^{2n}x}\lim_{N\to\infty}\left\{C_{2n}^n\sum_{m=0}^{N}a_m\cos mx+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_{2n}^k\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{\nu=2(n-k)}^{N+2(n-k)}a_{\nu-2(n-k)}\cos\nu x+\sum_{\nu=0}^{2(n-k)}a_{2(n-k)-\nu}\cos\nu x+\sum_{\nu=1}^{N-2(n-k)}a_{\nu+2(n-k)}\cos\nu x\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2^{2n}\sin^{2n}x}\left\{(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^k a_{2(n-k)}+\right.$$

$$+\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{N-2n}\left[(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(1+\delta_{2(n-k),\nu}\right)a_{|\nu-2(n-k)|}+a_{\nu+2(n-k)}\right](-1)^k C_{2n}^k+C_{2n}^n a_\nu\right]\cos\nu x+\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_{2n}^{k}\left[\sum_{\nu=N-2n+1}^{N+2(n-k)}\left(1+\delta_{2(n-k),\nu}\right)a_{|\nu-2(n-k)|}\cos\nu x+\sum_{\nu=N-2n+1}^{N-2(n-k)}a_{\nu+2(n-k)}\cos\nu x\right]+$$

$$+C_{2n}^{n}\sum_{\nu=N-2n+1}^{N}a_{\nu}\cos\nu x\left.\right]\Bigg\}=\frac{1}{2^{2n}\sin^{2n}x}\left\{(-1)^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{2n}^{k}a_{2(n-k)}+\right. \tag{2.1}$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(-1)^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(1+\delta_{2(n-k),\nu}\right)a_{|\nu-2(n-k)|}+a_{\nu+2(n-k)}\right](-1)^{k}C_{2n}^{k}+C_{2n}^{n}a_{\nu}\right]\cos\nu x\right\}$$

Т.р.-ы слева и справа в (2.1) сходятся (расходятся) одновременно.

3. Аналогично (1.3), (2.1) в предположениях (1.2) приходим к тождественным преобразованиям

$$s(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_{m}\sin mx=\frac{(-1)^{n}}{2^{2n-1}\sin^{2n-1}x}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}C_{2n-1}^{k}b_{2(n-k)-1}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}C_{2n-1}^{k}\times\right.$$

$$\left.\times\left[b_{2(n-k)+\nu-1}+\operatorname{sign}[2(n-k)-\nu-1]b_{|2(n-k)-\nu-1|}\cos\nu x\right]\right\},\quad b_{0}=0 \tag{3.1}$$

$$s(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_{m}\sin mx=\frac{1}{2^{2n}\sin^{2n}x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{C_{2n}^{n}b_{\nu}+(-1)^{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}C_{2n}^{k}\left[b_{\nu+2(n-k)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{sign}(\nu-2(n-k))b_{|\nu-2(n-k)|}\right]\sin\nu x\right\},\qquad b_{0}=0 \tag{3.2}$$

Т.р.-ы слева и справа в (3.1),(3.2) сходятся (расходятся) вместе.

4. Непосредственно вытекают (пп.1.1-3.2), [11, п.682],[11, п. 704], [11, п.751].

Теорема 1. Для сходимости т.р. (1.3) ((3.1)) слева, в предположениях (1.2), необходимо и достаточно, чтобы при некотором $n=n_0$ сходился хотя бы один из двух т.р. (1.3),(2.1)((3.1),(3.2)) справа. Если данное условие выполняется, то при прочих n сходятся названные т.р. справа, причем при всех n имеют место оба равенства (1.3),(2.1),((3.1),(3.2)).

Теорема 2. Пусть исходные т.р. (1.1),(3.1) в случаях (1.3) и (2.1) ((3.1) и (3.2)) сходятся на $(0,\pi)$ к функциям $f(x)\,(g(x))$, определенным и непрерывно-дифференцируемым на отрезке $[0,\pi]$ $2n-2$ и $2n-1$ раз $(n\geq 1)$. Пусть, кроме того, существуют, $f^{(2n-1)}(x)$ и $f^{(2n)}(x)\,(g^{(2n-1)}(x)$ и $g^{(2n)}(x))$ на $[0,\pi]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, абсолютно интегрируемые на $[0,\pi]$. Тогда коэффициенты т.р. в правой части (1.3),(3.1) и (2.1),(3.2) есть $o\left(1/\nu^{2n-1}\right)$ и $o\left(1/\nu^{2n}\right)$.

Определение. Преобразования (1.3),(3.1)((2.1),(3.2)) – методы ускорения сходимости косинусных (синусных) т.р.

5. В [8] записывается преобразование Абеля для т.р. второй итерации [11,п. 692]. Применением преобразования произвольное число крат дается вывод регулярного метода ускорения сходимости т.р. четной итерации. Доказывается теорема, которая гарантирует при выполнении для коэффициентов некоторых предельных условий ускорение сходимости т.р. Здесь заменой переменной в исходных т.р. (1.1), (3.1)

$$x = 2y \tag{5.1}$$

применением (1.3),(2.1),(3.1),(3.2) к т.р. с коэффициентами

$$\left(\bar{a}_k, \bar{b}_k\right) = \begin{cases} (0,0) & \text{при } k \text{ нечетном} \\ \left(a_{k/2}, b_{k/2}\right) & \text{при } k \text{ четном} \end{cases} \tag{5.2}$$

с возвратом к переменной x, получен метод ускорения сходимости т.р. четной и нечетной итераций, который при первой и четной итерациях отличается от метода в [8] удобной для анализа и вычислений формой

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right) = \bar{a}_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\bar{a}_m \cos my + \bar{b}_m \sin my\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\sin^{2n-1} y}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k \bar{b}_{2(n-k)-1} + \sum_{i=1,3,}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k \times\right.\right. \tag{5.3}$$

$$\times\left[\bar{b}_{i+2(n-k)-1} + \operatorname{sign}[2(n-k)-i-1]\times\bar{b}_{|2(n-k)-i-1|}\right]\cos iy +$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k\left[\left(1+\ddot{a}_{2(n-k)-1,i}\right)\bar{a}_{|i-2(n-k)+1|} - \bar{a}_{i+2(n-k)-1}\right]\sin iy\right]\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\sin^{2n-1} x/2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k\left[b_{i+n-k-1} + \operatorname{sign}(n-k-i)b_{|n-k-i|}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(i-\frac{1}{2}\right)x + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k\left[\left(1+\ddot{a}_{n-k,i}\right)a_{|i-n+k|} - a_{i+n-k-1}\right]\sin\left(i-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right) = \bar{a}_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\bar{a}_m \cos my + \bar{b}_m \sin my\right) = \frac{1}{2^{2n}\sin^{2n} y}\times$$

$$\times\left\{(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^k \bar{a}_{2(n-k)} + \sum_{i=2,4}^{\infty}\left[\left[(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(1+\ddot{a}_{2(n-k),i}\right)\bar{a}_{|i-2(n-k)|} + \bar{a}_{i+2(n-k)}\right]\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\times(-1)^k C_{2n}^k + C_{2n}^n \bar{a}_i\right]\cos iy + \left[C_{2n}^n \bar{b}_i + (-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\left[\bar{b}_{i+2(n-k)} + \operatorname{sign}(i-2(n-k))\bar{b}_{|i-2(n-k)|}\right]\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(-1)^k C_{2n}^k\right]\sin iy\right]\right\} = \frac{1}{2^{2n}\sin^{2n}\frac{x}{2}}\left\{(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^k a_{n-k} +\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left[(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(1+\ddot{a}_{n-k,i}\right)a_{|i-n+k|} + a_{i+n-k}\right](-1)^k C_{2n}^k + C_{2n}^n a_i\right]\cos ix +\right.$$

$$\left.\left.+\left[(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\left[b_{i+n-k} + \operatorname{sign}(i-n+k)b_{|i-n+k|}\right](-1)^k C_{2n}^k + C_{2n}^n b_i\right]\sin ix\right]\right\} \tag{5.4}$$

Коэффициенты в (5.3) и (5.4) при косинусах и синусах (с точностью до знака), когда $\nu > n_\nu$ с преобразуются к виду [4]

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[b_{i+n-k-1} - b_{i-n+k}\right](-1)^k C_{2n-1}^k = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k b_{i-n+k} + \sum_{s=n}^{2n-1}(-1)^{2n-1-s} C_{2n-1}^{2n-1-s}\times$$

$$\times b_{i-n+s} = -\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k b_{i-n+k} = -\Delta^{2n-1} b_{i-n} \tag{5.5}$$

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\left[a_{\nu-n+k}+a_{\nu+n-k}\right](-1)^k C_{2n}^k + C_{2n}^n a_\nu = (-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n}^k a_{\nu-n+k} + C_{2n}^n a_\nu +$$

$$+(-1)^n\sum_{s=n+1}^{2n}(-1)^{2n-s} C_{2n}^{2n-s} a_{\nu-n+s} = (-1)^n\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k C_{2n}^k a_{\nu-n+k} = (-1)^n \Delta^{2n} a_{\nu-n} \quad (5.5)$$

Результаты (5.5) (при $n=1$) и (5.6) совпадают с полученными в [8].

Кроме того, с использованием (5.3)-(5.6) и теорем 1,2 п.4 могут быть доказаны и для т.р.(5.3), (5.4) аналогичные теоремы, причем вместо теоремы 1 придем к утверждениям Салема [12].

6. Ускоряется сходимость известного решения – т.р. для прогиба в задаче об изгибе прямоугольной изотропной шарнирно-опертой пластины поперечной сосредоточенной силой [13]. Ранее в [14] ускорялась сходимость т.р. прогиба лишь в центре изотропной квадратной пластины при равномерном внешнем давлении и названных граничных условиях.

Получены аналитические выражения для всех вторых и третьих частных производных от прогиба, которыми определяется напряженно-деформируемое состояние пластины, доступные для вычислений.

Прежде, при распределенной нагрузке, почленным дифференцированием получены лишь вторые производные, кроме смешанной.

Решение для прогиба с использованием метода (2.1) второй итерации при суммировании по m записывается в виде [13]

$$w(x,y) = \frac{4P}{Dab}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_k x\,\sin\mu_n y\,\sin\lambda_k\xi\,\sin\mu_n\eta}{\left(\lambda_k^2+\mu_n^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2P}{Dab}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\lambda_k(x-\xi)\,\sin\lambda_k\xi\,\sin\mu_n\eta}{\left(\lambda_k^2+\mu_n^2\right)^2} - \frac{\cos\lambda_k(x-\xi)\,\sin\lambda_k\xi\,\sin\mu_n\eta}{\left(\lambda_k^2+\mu_n^2\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{P}{2Dab}\left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{mn}\cos\lambda_m(x-\xi)\sin\mu_n y\,\sin\mu_n\eta}{\sin^2\lambda_1(x-\xi)} - \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{mn}\cos\lambda_m(x+\xi)\sin\mu_n y\,\sin\mu_n\eta}{\sin^2\lambda_1(x+\xi)}\right) \quad (6.1)$$

Здесь

$$A_{0n} = \frac{\lambda_2^2\left(2\mu_n^2+\lambda_2^2\right)}{\mu_n^4\left(\lambda_2^2+\mu_n^2\right)^2} - \frac{1}{\mu_n^4},\quad A_{1n} = \frac{\lambda_4^2\left(5\lambda_1^2+\mu_n^2\right)}{\left(\lambda_1^2+\mu_n^2\right)^2\left(\lambda_3^2+\mu_n^2\right)^2}$$

$$A_{2n} = \frac{\lambda_4^2}{\mu_n^4}\left[\frac{\lambda_4^2+2\mu_n^2}{\left(\lambda_4^2+\mu_n^2\right)^2} - \frac{2\lambda_2^2+\mu_n^2}{\left(\lambda_2^2+\mu_n^2\right)^2}\right] + \frac{1}{\mu_n^4} \quad (6.2)$$

$$A_{mn}=\frac{\lambda_4^2\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^3-2\lambda_4^2\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2\left(3\lambda_m^2-5\lambda_1^2\right)-2\lambda_4^4\left(\lambda_m^2-\lambda_1^2\right)\left(\mu_n^2+\lambda_1^2\right)}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2\left(\lambda_{m+2}^2+\mu_n^2\right)^2\left(\lambda_{m-2}^2+\mu_n^2\right)^2} \quad (6.3)$$

$$m\geq 3,\ n=1,2,\ldots$$

Переход ко второму выражению в (6.1) обеспечивается сходимостью т.р.- слагаемых, а к третьему – утверждениями теоремы 1 (п.4).

Пусть

$$\overline{A}_{0n}=\frac{\lambda_2^2\left(2\mu_n^2+\lambda_2^2\right)}{\mu_n^4\left(\lambda_2^2+\mu_n^2\right)^2},\quad \overline{A}_{2n}=\frac{\lambda_4^2}{\mu_n^4}\left[\frac{\lambda_4^2+2\mu_n^2}{\left(\lambda_4^2+\mu_n^2\right)^2}-\frac{2\lambda_3^2+\mu_n^2}{\left(\lambda_3^2+\mu_n^2\right)^2}\right]$$

$$\overline{A}_{mn}=A_{mn},\ m=1,3,4,\ldots,\qquad n=1,2,\ldots \quad (6.4)$$

Тогда (6.1) приводится к виду

$$w(x,y)=\frac{P}{2Dab}\left(\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\overline{A}_{mn}\cos\lambda_m(x-\xi)\sin\mu_n y\,\sin\mu_n\eta}{\sin^2\lambda_1(x-\xi)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\overline{A}_{mn}\cos\lambda_m(x+\xi)\sin\mu_n y\,\sin\mu_n\eta}{\sin^2\lambda_1(x+\xi)}\right) \quad (6.5)$$

Из (6.2), (6.4) имеем

$$\overline{A}_{mn}=O\left(1/n^6\right),\quad \text{когда } m=0,1,2;\ n=1,2,\ldots; \quad (6.6)$$

Далее с использованием равенств

$$\left(e^2+s^2\right)^2=e^4+2e^2s^2+s^4\geq e^4+2\sqrt{2}es^3\geq 2\sqrt{2}\sqrt[4]{2}e^{5/2}s^{3/2},\ \ e^2+s^2\geq 2es \quad (6.7)$$

получаются оценки

$$\left|\overline{A}_{mn}\right|<\frac{C}{\lambda_m^{1.5+i}\mu_n^{4.5-i}},\quad i=0,1,1.5,2,3;\ \ m=3,4,\ldots;\ n=1,2,\ldots \quad (6.8)$$

Вводятся функции

$$f(t,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{A}_{mn}\cos\lambda_m t\sin\mu_n y\,\sin\mu_n\eta,\ \ g(t,y)=\frac{f(t,y)}{\sin^2\lambda_1 t} \quad (6.9)$$

Тогда прогиб записывается в виде

$$w(x,y)=\frac{P}{2Dab}\left(g(x-\xi,y)-g(x+\xi,y)\right) \quad (6.10)$$

Доказывается, что любые частные производные до третьего порядка от суммы т.р. (6.9) существуют и вычисляются почленным дифференцированием. Для этого, т.р. (6.9) формально дифференцируется до трех раз и исследуется на абсолютную и равномерную сходимость.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\bar{A}_{mn}\frac{d^k\cos\lambda_m t}{dt^k}\frac{d^{s-k}\sin\mu_n y}{dy^{s-k}}\sin\mu_n\eta\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{2}\left|\bar{A}_{0m}\right|+\sum_{m=3}^{\infty}\left|\bar{A}_{mn}\right|\lambda_m^k\mu_n^{s-k}\right)\le$$

$$\le B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}+C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^{1,5+i-k}}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^{4,5+i+k-s}}<\infty \qquad (6.11)$$

если $i=k=0,1,2,3;\ k=0,1,..;\ s=1,2,3;\ i=1.5,\ k=1,\ s=2$

Пусть неравенста (6.11) выполняются. Тогда т.р. (6.11) сходится равномерно и, в силу [11, пп. 393,435], последовательно имеем

$$\frac{\partial^s f(t,y)}{\partial t^k\partial y^{s-k}}=\frac{i^s}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\bar{A}_{mn}\lambda_m^k\mu_n^{s-k}\left(e^{i\lambda_m t}+(-1)^k e^{-i\lambda_m t}\right)\left(e^{i\mu_n t}+(-1)^{s-k}e^{-i\mu_n t}\right)$$

$$k=0,1,\dots s;\ \ s=1,2,3 \qquad (6.12)$$

В итоге, дифференцированием (6.9),(6.10), получаем

$$\frac{\partial^s w(x,y)}{\partial x^k\partial y^{s-k}}=\frac{P}{2Dab}\left(\frac{\partial^s}{\partial x^k\partial y^{s-k}}g(x-\xi,y)-\frac{\partial^s}{\partial x^k\partial y^{s-k}}g(x+\xi,y)\right)$$

$$k=0,1,\dots,\qquad s=2,3$$

$$\frac{\partial^{1+i}g(t,y)}{\partial t\partial y^i}=\frac{1}{\sin^3\lambda_1 t}\left[\sin\lambda_1 t\frac{\partial^{1+i}f(t,y)}{\partial t\partial y^i}-2\lambda_1\cos\lambda_1 t\frac{\partial^i f(t,y)}{\partial y^i}\right],\quad i=1,2$$

$$\frac{\partial^{2+j}g(t,y)}{\partial t^2\partial y^j}=\frac{1}{\sin^4\lambda_1 t}\left[\sin^2\lambda_1 t\frac{\partial^{2+j}f(t,y)}{\partial t^2\partial y^j}-\lambda_2\sin\lambda_2 t\frac{\partial^{1+j}f(t,y)}{\partial t\partial y^j}+\right.$$
$$\left.+\lambda_1^2\left(6-4\sin^2\lambda_1 t\right)\frac{\partial^j f(t,y)}{\partial y^j}\right],\quad j=0,1 \qquad (6.13)$$

$$g_{ttt}(t,y)=\frac{1}{\sin^5\lambda_1 t}\left[\sin^3\lambda_1 t\ f_{ttt}(t,y)-6\lambda_1\cos\lambda_1 t\ \sin^2\lambda_1 t\ f_{tt}(t,y)+\right.$$
$$+6\lambda_1^2\left(3-2\sin^2\lambda_1 t\right)\sin\lambda_1 t\ f_t(t,y)+$$
$$\left.+4\lambda_1^3\left(5\cos\lambda_1 t\ \cos\lambda_2 t+\cos\lambda_1 t-12\cos^3\lambda_1 t\right)f(t,y)\right]$$

В силу симметрии, применение метода (2.1) при суммировании по n приводит к аналогичным результатам.

Метод (1.3), (2.1) при $n=1,2,3$ апробировался на тестовом т.р. (6) в $[5]$ и при $p=0.1, \theta=1^{\circ}$ получено совпадение до пятой значащей цифры.

Итак, величины напряженно-деформированного состояния пластины представляются в явном и доступном для вычислений виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernoulli D. Mem.Acad.Berlin, (55), p.187. 1953.
2. Паплаускас А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. М.:Наука, 1966. 276 с.
3. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гл. VI. Ленинград, 1932.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973. 631 с.
5. James E. Kiefer, George H. Weiss. A comparison of two methods for accelerating the convergence of fourier series //Comput. And Math with Appls, 1981. V.7. № 6, pp.527-535.
6. Wynn P. Transformation to accelerate the convergence of Fourier series //MRC Technical Report 673, 1966.
7. Levin D. Development of nonlinear transformation for improving the convergence of sequences // Int. J. Computer Math., 1973, v.3, pp. 371-388.
8. Dadu A. Une methode d'acceleration de la convergence des series trigonometriques //Anal. numer. et theor. Approxim., 1980, v. 9, № 1, pp.27-33.
9. Brezinski C. Survey on convergence acceleration methods in numerical analysis //Math.Stud., 1978, v. 46, № 1, pp.28-41.
10. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т.1. М.: Физматгиз, 1961. 164с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Тт. 2, 3. М.:Наука, 1970. 1456 с.
12. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз,1961. 936 с.
13. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. М.-Л.:Огиз,1948. 460 с.
14. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.-Л.:Огиз, 1947. 464 с.
15. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Гостехтеориздат, 1949. 695 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.08.2000