

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ ДЛЯ
КОНЕЧНОЙ ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ
ВЫПУКЛЫМ МНОГОУГОЛЬНИКОМ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ
РАЗРЕЗОМ
Капанадзе Г.А.

Գ.Ա. Կապանաձե

Ռոտացիկ բազմանկյունով և ուղղագիծ կտրվածքով սահմանափակված երկկապ վերջավոր տիրույթի
համար սալի ծռման մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է ուռուցիկ բազմանկյունով և ուղղագիծ կտրվածքով սահմանափակված երկկապ վերջավոր տիրույթի համար իզոտրոպ առածական սալի ծռման խնդիրը։ Ենթադրվում է, որ արտաքին եզրագծի յուրաքանչյուր օղակին ամրացված է կոշտ ձող և սալը ծռվում է ձողերի վրա կիրառված նորմալ-ծողով մոմենտներով, իսկ եզրագծի ներքին մասը ազատ ինքնված է։ Տվյալ տիրույթի կոնֆորմ արտապատկերմամբ շրջանային օղակի վրա կառուցված է խնդրի էֆեկտիվ լուծույթը։

G.A. Kapanadze

The Problem of Plate Bending for double-connected region bounded by convex polygon
and rectilinear cut

Рассматривается задача изгиба изотропной упругой пластинки для конечной двухсвязной области, ограниченной выпуклым многоугольником и прямолинейным разрезом. Предполагается, что на каждом звене внешней границы прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормально-изгибающими моментами, приложенными к планкам, а внутренняя граница оперта. Путем конформного отображения данной области на круговое кольцо, решение рассмотренной задачи построено в эффективном виде (в квадратурах).

§1. Конформное отображение двухсвязной области, ограниченной выпуклым многоугольником и прямолинейным разрезом, на круговое кольцо

Пусть S — двухсвязная область на плоскости z комплексной переменной, ограниченная выпуклым многоугольником (A) с границей L_0 и прямолинейным разрезом (B_1, B_2) с границей L_1 .

Рассмотрим задачу:

Найти вид функции $z = \omega(\zeta)$, конформно отображающий круговое кольцо $D(1 < \zeta < R)$ на область S . Существование функции $\omega(\zeta)$ доказано в работе [1].

Обозначим через A_j ($j = 1, \dots, n$) вершины (их аффиксы) многоугольника (A) и ось Ox направим вдоль отрезка (B_1, B_2) . Точку $z = 0$ возьмем в середине отрезка (B_1, B_2) . Величину внутренних углов области S при вершинах A_j обозначим через $\pi \alpha_j^0$ и положительным

направлением на $L = L_0 \cup L_1 \left(L_0 = \bigcup_1 L_0^{(k)}, L_0^{(k)} = A_k A_{k+1}, k = 1, \dots, n, \right.$

$A_{n+1} = A_n$, $L_1 = \bigcup_1^2 L_1^{(k)}$, $L_1^{(1)} = B_1 B_2$, $L_1^{(2)} = B_2 B_1$ будем считать то, которое область S оставляет слева. Пусть $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ — углы между осью Ox и внешних нормалей контуров L_1 и L_0 в точке $t \in L$. Очевидно, что $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ — кусочно-постоянные функции: $\beta(t) = \pi/2$, $t \in L_1^{(1)}$, $\beta(t) = -\pi/2$, $t \in L_1^{(2)}$, $\alpha(t) = \alpha_k$, $t \in L_0^{(k)}$, ($k = 1, \dots, n$).

Легко заметить, что на $L_1^{(k)}$ и $L_0^{(k)}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[t \cdot e^{-i\beta(t)}] &= \operatorname{Re}[B(t)e^{-i\beta(t)}], & t \in L_1 \\ \operatorname{Re}[t \cdot e^{-i\alpha(t)}] &= \operatorname{Re}[A(t)e^{-i\alpha(t)}], & t \in L_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — кусочно-постоянные функции, $A(t) = A_k$ и $B(t) = B_k$ при $t \in L_0^{(k)}$ и $t \in L_1^{(k)}$.

Пусть функция $z = \omega(\zeta)$ конформно отображает круговое кольцо $D(1 < |\zeta| < R)$ на область S . Будем считать, что окружность $l_1 (|\zeta| = 1)$ отображается на L_1 , а окружность $l_0 (|\zeta| = R)$ — на L_0 . Обозначим через a_k и b_k прообразы точек A_k и B_k и положительным направлением на $l = l_0 \cup l_1$ примем то, которое область D оставляет слева.

В силу условия (1.1) относительно функции $\omega'(\zeta) = d\omega/d\zeta$ получаем граничную задачу Римана-Гильберта для кругового кольца D

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[i\sigma \cdot e^{-i\beta(\sigma)} \omega'(\sigma)] &= 0, & \sigma \in l_1 \\ \operatorname{Re}[i\tau \cdot e^{-i\alpha(\tau)} \omega'(\tau)] &= 0, & \tau \in l_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Будем искать решение задачи (1.2) в классе $h(b_1, b_2)$ [2]. Индекс этой задачи данного класса равно нулю.

Граничные условия (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \chi(\sigma) - \overline{\chi(\sigma)} &= f_1(\sigma), & \sigma \in l_1 \\ \chi(\tau) - \overline{\chi(\tau)} &= f_0(\tau), & \tau \in l_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$\chi(\zeta) = \ln \omega'(\zeta)$, $f_1(\sigma) = \ln(\sigma^{-2} e^{2i\beta(\sigma)})$, $\sigma \in l_1$, $f_0(\tau) = \ln(R^2 \tau^{-2} e^{2i\alpha(\tau)})$, $\tau \in l_0$. Задача (1.3) представляет собой задачу Дирихле для кругового кольца. Необходимое условие разрешимости этой задачи имеет вид

$$\int_0^{2\pi} f_1(e^{i\vartheta}) d\vartheta = \int_0^{2\pi} f_0(Re^{i\vartheta}) d\vartheta \quad (1.4)$$

В силу существования функции $\omega(\zeta)$ мы должны предположить, что условие (1.4) выполняется [1]. Этому условию можно придать вид

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{R} \right)^{\alpha_k - 1} \cdot \prod_{j=1}^2 b_j = 1 \quad (1.5)$$

Разлагая функцию $\chi(\zeta)$ в ряд Лорана

$$\chi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot \zeta^k, \quad (1 < |\zeta| < R) \quad (1.6)$$

из граничных условий (1.3) относительно коэффициентов d_k получаем систему

$$\begin{aligned} R^{2k} d_k - \overline{d_{-k}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i_0} \frac{R^{2k} f_0(\tau)}{\tau^k} \frac{d\tau}{\tau} \\ d_k - \overline{d_{-k}} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{i_1} \frac{f_1(\sigma)}{\sigma^k} \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \operatorname{Im} d_0 &= -\frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} f_1(e^{i\vartheta}) d\vartheta \end{aligned} \quad (1.7)$$

Найдя из этой системы значения коэффициентов d_k и подставляя их в правую часть формулы (1.6), для функции $\chi(\zeta)$ получаем формулу

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i_0} \frac{f_0(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{i_1} \frac{f_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{i_0} \frac{1}{R^{2k} - 1} \times \right. \\ &\times \left(\frac{\zeta^k}{\tau^k} - \frac{\tau^k}{\zeta^k} \right) \frac{f_0(\tau)}{\tau} d\tau + \int_{i_1} \frac{1}{R^{2k} - 1} \left(\frac{\zeta^k}{\sigma^k} - \frac{\sigma^k}{\zeta^k} \right) \frac{f_1(\sigma)}{\sigma} d\sigma \Big] + \overline{d_0} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{i_0} \frac{f_0(\tau) d\tau}{\tau - R^{2k} \zeta} + \int_{i_1} \frac{f_1(\sigma) d\sigma}{\sigma - R^{2k} \zeta} \right] + \overline{d_0} = \\ &= \ln \prod_{k=-\infty}^{\infty} G(R^{2k} \zeta) g(R^{2k} \zeta) R^{2k} \zeta^{-2} R^{2\delta_k} + \overline{d_0} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$G(\zeta) = \prod_{j=1}^n (\zeta - a_j)^{\alpha_j^0 - 1}, \quad g(\zeta) = \prod_{j=1}^2 (\zeta - b_j), \quad \delta_k = \begin{cases} 0, & k \geq 0 \\ 1, & k \leq -1 \end{cases}$$

Таким образом, для искомой функции $z = \omega(\zeta)$ получаем формулу

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= k_0 e^{i\alpha_0^0} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{R} \right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k} \right)^{\alpha_k^0 - 1} \prod_{k=1}^2 \left(1 - \frac{b_k}{\zeta} \right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^2 \left(\frac{a_k}{R} \right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{R^{2j} a_k} \right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{a_k}{R^{2j} \zeta} \right)^{\alpha_k^0 - 1} \prod_{k=1}^2 b_k \cdot \left(1 - \frac{\zeta}{R^{2j} b_k} \right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{b_k}{R^{2j} \zeta} \right) d\zeta \cdot \omega(\zeta_0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

где k_0 — произвольная действительная постоянная, ζ_0 — произвольная

точка области D , $d_0^* = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} f_1(e^{i\theta}) d\theta$.

§ 2. Задача изгиба пластинки для конечной двухсвязной области, ограниченной выпуклым многоугольником и прямолинейным разрезом

Пусть срединная поверхность изотропной упругой пластинки на плоскости z занимает конечную двухсвязную область S , рассмотренную в § 1.

Предположим, что на каждом звене $L_0^{(k)}$ прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормально-изгибающими моментами, приложенными к планкам, а часть (B_1, B_2) оперта.

Рассмотрим задачу:

Найти прогиб $w(x, y)$ средней поверхности пластинки, если на каждом звене граничного контура L_0 известны значения главного изгибающего момента M_n .

Согласно приближенной теории изгиба пластинки прогиб $w(x, y)$ средней поверхности пластинки в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнению [2,3]

$$\Delta^2 w(x, y) = 0, \quad z = x + iy \in S \quad (2.1)$$

и граничным условиям

$$w = 0, \quad M_n(t) = 0, \quad t \in L_1$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad M_n(t) = f(t), \quad t \in L_0 \quad (2.2)$$

На основании известных формул [2], [3], сформулированная задача сводится к отысканию двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, голоморфных в области S , по следующим граничным условиям на L :

$$\operatorname{Re} \left[i e^{-iv(t)} (\varphi(t) + i \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}) \right] = 0$$

$$\operatorname{Re} \left[i e^{-iv(t)} (\chi \varphi(t) - i \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}) \right] = f_j(t), \quad t \in L_j, \quad j = 0, 1 \quad (2.3)$$

где

$$f_0(t) = \frac{1}{1-\sigma} \int_0^1 M_n(t) ds + C^{(0)}(t), \quad t \in L_0, \quad C^{(0)} = C_1^{(0)}, \quad t \in L_0^{(k)}, \quad f_1(t) = C^{(1)}(t)$$

$$t \in L_1, \quad C^{(1)}(t) = C_2^{(1)}, \quad t \in L_1^{(k)}, \quad v(t) = \alpha(t), \quad t \in L_0 \quad \text{и} \quad v(t) = \beta(t), \quad t \in L_1$$

Постоянные $C_1^{(0)}$ и $C_2^{(0)}$ заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения задачи таким образом, чтобы функции $\varphi(z)$ и $\overline{z}\varphi'(z) + \psi(z)$ были непрерывно продолжимы в области $S + L$ (функцию $\varphi(z)$ можно подчинить условию $\varphi(z_0) = 0$, где z_0 — некоторая точка области S).

Граничные условия (2.3) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left[i e^{-iv(t)} \varphi(t) \right] = F_j(t) \quad (2.4)$$

$$\operatorname{Re} \left[i e^{-iv(t)} (\varphi(t) + i \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}) \right] = 0, \quad t \in L_j, \quad j = 0, 1 \quad (2.5)$$

где $F_1(t) = \frac{C^{(1)}}{\kappa+1}$, $F_0(t) = \frac{1}{\kappa+1} [f_0(t) + c^{(0)}(t)]$ при $t \in L_1$ и $t \in L_0$ соответственно.

Пусть функция $z = \omega(\zeta)$ конформно отображает круговое кольцо $D(1 < |\zeta| < R)$ на область S (см. §1).

Обозначая $\varphi(z) = \varphi[\omega(\zeta)] = \varphi_0(\zeta)$, из граничного условия (2.4) относительно функции $\chi(\zeta) = \zeta^{-1} \varphi_0(\zeta)$ получаем граничную задачу Римана-Гильберта для кругового кольца D

$$\begin{aligned} \chi(\sigma) - e^{2i\beta(\sigma)} \overline{\frac{\sigma}{\sigma}} \chi(\overline{\sigma}) &= \sigma^{-1} \psi_1(\sigma), \quad \sigma \in l_1 \\ \chi(\tau) - e^{2i\alpha(\tau)} \overline{\frac{\tau}{\tau}} \chi(\overline{\tau}) &= \tau^{-1} \psi_0(\tau), \quad \tau \in l_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\psi_1(\tau) = -2ie^{i\alpha(\tau)} F_1(\sigma)$, $\psi_0(\tau) = -2ie^{i\alpha(\tau)} F_0(\tau)$.

Функции $e^{2i\alpha(\tau)}$ и $e^{2i\beta(\sigma)}$ можно представить (см. §1) в виде

$$e^{2i\alpha(\tau)} = \tau \cdot \omega'(\tau) [\tau \cdot \omega'(\tau)]^{-1}, \quad e^{2i\beta(\sigma)} = \sigma \cdot \omega'(\sigma) [\sigma \cdot \omega'(\sigma)]^{-1}$$

где $\omega(\zeta)$ определена формулой (1.9). На основании этих формул граничные условия (2.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Omega(\sigma) - \overline{\Omega(\sigma)} &= \Theta_1(\sigma), \quad \sigma \in l_1 \\ \Omega(\tau) - \overline{\Omega(\tau)} &= \Theta_0(\tau), \quad \tau \in l_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) &= \varphi_0(\zeta) \cdot [\zeta \omega'(\zeta)]^{-1}, \quad \Theta_1(\sigma) = \sigma^{-1} \cdot \omega'^{-1}(\sigma) \cdot \psi_1(\sigma), \quad \sigma \in l_1 \\ \Theta_0(\tau) &= \tau^{-1} \cdot \omega'^{-1}(\tau) \cdot \psi_0(\tau), \quad \tau \in l_0 \end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (2.7) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \Theta_1(\sigma) d\vartheta = \int_0^{2\pi} \Theta_0(\tau) d\vartheta \quad (2.8)$$

При выполнении этого условия, решение задачи (2.7) представляется в виде

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^1 \int_{l_j} K(\zeta; t) \Theta_j(t) dt + c_1^* \quad (2.9)$$

где

$$K(\zeta; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - R^{2k}\zeta}; \quad c_1^* - \text{произвольная действительная постоянная.}$$

Таким образом, решение задачи (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= -\frac{\zeta \cdot \omega'(\zeta)}{\pi(\kappa+1)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{l_1} \frac{e^{i\beta(\sigma)} c^{(1)}(\sigma) d\sigma}{(\sigma - R^{2k}\zeta) \sigma \omega'(\sigma)} + \int_{l_0} \frac{e^{i\alpha(\tau)} [f_0(\tau) + c^{(0)}(\tau)] d\tau}{(\tau - R^{2k}\zeta) \tau \omega'(\tau)} + c_1^{**} \right\} \\ (c_1^{**} &= -\pi(\kappa+1)c_1^*) \end{aligned} \quad (2.10)$$

а условие (2.8) записывается в виде

$$\int_{l_1} \frac{e^{i\beta(\sigma)} c^{(1)}(\sigma) d\sigma}{\sigma \omega'(\sigma)} + \int_{l_0} \frac{e^{i\alpha(\tau)} [f_0(\tau) + c^{(0)}(\tau)] d\tau}{\tau \omega'(\tau)} = 0 \quad (2.11)$$

Так как функция $\omega'(\zeta)$ в точках a_k имеет особенности вида $(\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1}$, то для непрерывной продолжимости функции $\varphi_0(\zeta)$ в $D+1$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{l_1} \frac{e^{i\beta(\sigma)} c^{(1)}(\sigma) d\sigma}{(\sigma - R^{2j} a_k) \sigma \omega'(\sigma)} + \int_{l_0} \frac{e^{i\alpha(\tau)} [f_0(\tau) + c^{(0)}(\tau)] d\tau}{(\tau - R^{2j} a_k) \tau \omega'(\tau)} + c_0^* \right\} = 0$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

На основании результатов [2] относительно поведения интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности, можно доказать, что функция $\varphi'(z)$ вблизи точек B_k удовлетворяет условию $|\varphi'(z)| \sim M|z - B_k|^{-1/2}$, ($k = 1, 2$), а вблизи точек A_m ($m = 1, \dots, n$) она ограничена.

После того, как найдена функция $\varphi(z)$, для определения функции $\psi(z)$ воспользуемся условием (2.5), которое можно записать в виде [4]

$$\operatorname{Re} [ie^{i\nu(t)} (\psi(t) + p(t)\varphi'(t))] = F_j^*(t), \quad t \in L_j, \quad j = 0, 1 \quad (2.13)$$

где $F_j^*(t) = F_j(t) + \operatorname{Re} [ie^{i\nu(t)} (t - p(t))\varphi'(t)]$, $t \in L_j$ ($j = 0, 1$), $p(t)$ — определенный полином, удовлетворяющий условиям

$$P(B_k) = \bar{B}_k \quad (k = 1, 2)$$

Так как $F_j(t)$ ($j = 0, 1$) — ограниченные функции, решение задачи (2.13) строится аналогично решению задачи (2.4). Условие разрешимости задачи (2.13) совместно с условиями непрерывной продолжимости выражения $\psi(z) + p(z)\varphi'(z)$ и условиями (2.11), (2.12) дает для определения $n+4$ искомых действительных постоянных систему $n+4$ линейных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами. Доказывается, что полученная система однозначно разрешима и, таким образом, рассмотренная задача имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. Конформное отображение многосвязных областей на канонические области // Усп. мат. наук. 1939. Вып.4. С.90-119.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
3. Лехницкий С.Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // ПММ, 1938. Т.II. Вып.2. С.181-210.
4. Банцури Р.Д. Решение третьей основной задачи теории упругости для двухсвязных областей, ограниченных ломаными // Докл. АН СССР. 1978. Т.243. №4. С.882-885.

Тбилисский государственный
университет

Поступила в редакцию
27.09.2000