УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА НА
ВЕЛИЧИНУ РАСЧЕТНОЙ НАГРУЗКИ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Гнуни В. Ц.

Վ. Յ. Գնունի

Ուղղանկյուն սալի հաշվարկային բեռի վրա Պուասսոնի գործակցի ազդեցության մասին

Աշխատանքում ցույց է տրվում նորմալ բեռով բեռնավորված, չորս եզրերը հողակապորեն ամրացված, իզոտրոպ, ուղղանկյուն սալի հաշվարկային բեռի վրա Պուասսոնի գործակցի նախն ազդեցությունը:

V. Ts. Gnuni

On the influence of Poisson's Ratio on the value of calculation load of a rectangular plate

В работе показывается существенное влияние коэффициента Пуассона на определенной из условия прочности расчетную нагрузку, загруженной давлением q , шарнирно опертая по краям прямоугольной пластинки.

1. Пусть прямоугольная пластинка размерами a, b, h отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Пластинка изготовлена из изотропного материала с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , пределом прочности или упругости $[\sigma]$, соответственно для хрупких или пластических материалов.

Прогиб пластинки под действием давления $q = q_0 \sin \pi x / a \sin \pi y / b$ определяется формулой [1]

$$w = \frac{12(1-\nu^2)a^4 q_0}{\pi^4 E h^3 (1+\lambda^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (\lambda = \frac{a}{b}) \quad (1.1)$$

Напряжения $\sigma_y(x, y, z)$ должны удовлетворять условию [2]

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \leq \sqrt{2}[\sigma] \quad (1.2)$$

При (1.1) напряжения в пластинке определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{12a^2 q_0 (1+\nu\lambda^2)}{\pi^2 h^2 (1+\lambda^2)^2} \frac{z}{h} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \sigma_{22} &= \frac{12a^2 q_0 (\nu+\lambda^2)}{\pi^2 h^2 (1+\lambda^2)^2} \frac{z}{h} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \sigma_{12} &= -\frac{12a^2 q_0 (1-\nu)\lambda}{\pi^2 h^2 (1+\lambda^2)^2} \frac{z}{h} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{6aq_0}{\pi h(1+\lambda^2)} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \sigma_{21} &= \frac{6aq_0\lambda}{\pi h(1+\lambda^2)} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{2} \left[1 + 3\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \frac{z}{h}\right] q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}\end{aligned}\quad (1.4)$$

Из сравнения формул (1.3) и (1.4) вытекает, что σ_{11}, σ_{21} и σ_{33} по сравнению с $\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ имеют порядок $\frac{h}{a}$ и $\frac{h^2}{a^2}$ соответственно, следовательно, в (1.2) можно пренебречь влиянием напряжений σ_{i3} ($i=1,2,3$) с точностью $\frac{h^2}{a^2}$ по сравнению с единицей, что в пределах точности классической теории тонких пластинок.

При этом предположении условие (1.2) упрощается и представляется в виде

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \leq [\sigma]$$

Подстановкой (1.3) в (1.5), для определения предельного значения приведенного параметра нагрузки

$$\bar{q}_0 = \frac{6a^2 q_0}{\pi^2 h^2 [\sigma]} \quad (1.6)$$

получается

$$\bar{q}_0^* = (1+\lambda^2)^2 \left[\sup_{(x,y,z)} \frac{2z}{h} \sqrt{F(x,y)} \right]^{-1} \quad (1.7)$$

где введены обозначения

$$F(x,y) = c_1 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + c_2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \quad (1.8)$$

$$c_1 = (1-\nu+\nu^2)\lambda^4 - (1-4\nu+\nu^2)\lambda^2 + (1-\nu+\nu^2) > 0, \quad c_2 = 3(1-\nu)^2\lambda^2 > 0 \quad (1.9)$$

В зависимости от значений коэффициента Пуассона ν и параметра отношения сторон пластинки λ

$$\sup_{(x,y,z)} \frac{2z}{h} \sqrt{F(x,y)} \quad (x \in [0,a], \quad y \in [0,b], \quad z \in [-0.5h, 0.5h])$$

достигается в точке $(0, 0, 0.5h)$ при $c_1 < c_2$ и в точке $(0.5a, 0.5b, 0.5h)$ при $c_1 > c_2$, откуда

$$\bar{q}_0^* = \begin{cases} (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{c_1} & \text{при } c_1 > c_2 \\ (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{c_1} \equiv (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{c_2} & \text{при } c_1 = c_2 \\ (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{c_2} & \text{при } c_1 < c_2 \end{cases} \quad (1.10)$$

2. Предварительно рассмотрим частный случай квадратной пластинки ($\lambda = 1$). В этом случае

$$c_1 = (1 + \nu)^2, \quad c_2 = 3(1 - \nu)^2 \quad (2.1)$$

и из условия $c_1 = c_2$ при $0 \leq \nu \leq 0.5$ получается

$$\nu^* = 2 - \sqrt{3} \approx 0.27 \quad (2.2)$$

Таким образом,

$$\bar{q}_0^* = \begin{cases} 4/(1 + \nu) & \text{при } 2 - \sqrt{3} < \nu \leq 0.5 \\ 4/(3 - \sqrt{3}) & \text{при } \nu = \nu^* = 2 - \sqrt{3} \\ 4/\sqrt{3}(1 - \nu) & \text{при } 0 \leq \nu < 2 - \sqrt{3} \end{cases} \quad (2.3)$$

В табл.1 приводятся значения приведенной расчетной нагрузки $\bar{q}_0^*$ для различных ν из отрезка $[0, 0.5]$.

Таблица 1

ν	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	ν^*	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$\bar{q}_0^*$	2.31	2.43	2.57	2.72	2.89	3.08	3.15	3.08	2.96	2.86	2.76	2.67

Как видно из приведенных в табл.1 результатов, значение ν существенно влияет на величину расчетной нагрузки пластинки. В интервале $[0, \nu^*)$ несущая способность пластинки возрастает, а в $[\nu^*, 0.5)$ убывает. Наибольшая несущая способность $\bar{q}_0^* = 3.15$ достигается при $\nu = \nu^* \approx 0.27$

3. Рассмотрим теперь случай $\lambda > 1$ и попытаемся найти ν^* в зависимости от λ .

Рассмотрим неравенство $c_1 > c_2$, которое представляется в виде

$$\lambda^4 - 2k\lambda^2 + 1 > 0 \quad (3.1)$$

где

$$k = \frac{2\nu^2 - 5\nu + 2}{\nu^2 - \nu + 1} \quad (3.2)$$

Легко заметить, что

$$0 \leq k < 1 \quad \text{при } 2 - \sqrt{3} < \nu \leq 0.5$$

$$k = 1 \quad \text{при } \nu = 2 - \sqrt{3} \quad (3.3)$$

$$1 < k \leq 2 \quad \text{при } 0 \leq \nu < 2 - \sqrt{3}$$

При $2 - \sqrt{3} \leq \nu \leq 0.5$ ($0 \leq k \leq 1$) неравенство (3.1) имеет место при любом $\lambda > 1$ и $\bar{q}_0^* = (1 + \lambda^2)^2 / \sqrt{c_1}$.

При $0 \leq \nu < 2 - \sqrt{3}$ ($1 < k \leq 2$) и $\lambda > 1$ уравнение

$$\lambda^4 - 2k\lambda + 1 = 0 \quad (3.4)$$

допускает корень

$$\lambda_* = \sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}} \quad (3.5)$$

т.е. возможно равенство $c_1 = c_2$.

Не вдаваясь в элементарные подробности, отметим, что при $0 \leq \nu < 2 - \sqrt{3}$

$$\bar{q}_0^* = \begin{cases} (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{c_1} & \text{при } \lambda > \lambda_* \\ (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{c_1} = (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{c_2} & \text{при } \lambda = \lambda_* \\ (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{c_2} & \text{при } \lambda < \lambda_* \end{cases}$$

В частных случаях

а) при $\nu = 0.5$ ($k = 0$)

$$\bar{q}_0^* = (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{0.75(\lambda^4 + \lambda^2 + 1)}$$

б) при $\nu = 0$ ($k = 2$), $\lambda_* = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$$\bar{q}_0^* = \begin{cases} (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{\lambda^4 - \lambda^2 + 1} & \text{при } \lambda > \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ 6\sqrt{2+\sqrt{3}} / \sqrt{3} & \text{при } \lambda = \lambda_* = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ (1+\lambda^2)^2 / \sqrt{3}\lambda & \text{при } \lambda < \sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases} \quad (3.8)$$

Отметим, что при $\lambda < 1$

$$\lambda_* = \sqrt{k - \sqrt{k^2 - 1}} \text{ при } \nu = 0 \text{ получается, что } \lambda_* = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. и Вайновский-Крижр С. Пластинки и оболочки. М.: ГИФМЛ, 1963. 635с.
2. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. II. А.-М.: Гостехиздат, 1934. 320с.
3. Качанов Л.М. Теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
9.11. 2000