ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №1, 2001 Механика

УДК 539.3

ТЕОРИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Амбарцумян С.А.

Ս. Ա. Համբարձումյան
Տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի տեսությունը մոմենտային լարումների հաշվառմամբ

Ձևակերպված են տրանսվերսալ-առաձգական մարմնի մոմենտային առաձգականության տեսության ելակետային հավասարումները և առնչությունները: Ստացված են բարակ տրանսվերսալ-իզոտրոպ սալերի հիմնական հավասարումները մոմենտային լարումների հաշվառմամբ [1-9]: Դիտարկված են որոշ մոդելային խնդիրներ

S. A. Ambartzumian
The theory of the transversal isotrop plate with the account of the couple stresses

Сформулированы исходные уравнения и соотношения моментной теории упругости в случае трансверсально упругого тела. Получены основные уравнения теории тонких трансверсально изотропных пластин с учетом моментных напряжений [1-9]. Рассмотрены некоторые модельные задачи

1. Пусть трансверсально изотропное тело в каждой точке имеет плоскость изотропии, параллельную плоскости x_1Ox_2. Тогда, определяющие тело уравнения или закон малых упругих деформаций запишутся следующим образом [2, 5, 8, 9]:

"Силовые напряжения"

$$\sigma_{11} = (2\mu+\lambda)\gamma_{11} + \lambda\gamma_{22} + \bar{\lambda}\gamma_{33}$$

$$\sigma_{22} = (2\mu+\lambda)\gamma_{22} + \lambda\gamma_{11} + \bar{\lambda}\gamma_{33} \tag{1.1}$$

$$\sigma_{33} = \frac{\bar{E}(1-\nu^2)}{E\Delta_1}\gamma_{33} + \bar{\lambda}(\gamma_{11}+\gamma_{22})$$

$$\sigma_{12} = (\mu+\alpha)\gamma_{12} + (\mu-\alpha)\gamma_{21}$$

$$\sigma_{21} = (\mu+\alpha)\gamma_{21} + (\mu-\alpha)\gamma_{12} \tag{1.2}$$

$$\sigma_{i3} = (\bar{\mu}+\bar{\alpha})\gamma_{i3} + (\bar{\mu}-\bar{\alpha})\gamma_{3i} \qquad i = 1,2$$

$$\sigma_{3i} = (\bar{\mu}+\bar{\alpha})\gamma_{3i} + (\bar{\mu}-\bar{\alpha})\gamma_{i3} \tag{1.3}$$

где

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E}{\Delta_1}\left[\frac{\nu}{E} + \frac{(\bar{\nu})^2}{\bar{E}}\right]$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\nu}(1+\nu)}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = (1+\nu)\left[\frac{1-\nu}{E} - 2\frac{(\bar{\nu})^2}{\bar{E}}\right] \tag{1.4}$$

E-модуль упругости в плоскости изотропии, ν-коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, $\overline{E}$ –модуль упругости для направлений, перпендикулярных плоскости изотропии, $\overline{\nu}$ –коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном ей, $\overline{\mu}$ –модуль сдвига в плоскостях, нормальных плоскости изотропии, μ –модуль сдвига в плоскости изотропии, α, $\overline{\alpha}$ –новые упругие постоянные;

"моментные напряжения"

$$\begin{aligned}
\mu_{11} &= \left(\overline{2\gamma+\beta}\right)\chi_{11} + \overline{\beta}\chi_{22} + \beta\chi_{33} \\
\mu_{22} &= \overline{\beta}\chi_{11} + \left(\overline{2\gamma+\beta}\right)\chi_{22} + \beta\chi_{33} \\
\mu_{33} &= \beta\chi_{11} + \beta\chi_{22} + \overline{\gamma}_3\chi_{33}
\end{aligned} \qquad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{12} &= \left(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}\right)\chi_{12} + \left(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}\right)\chi_{21} \\
\mu_{21} &= \left(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}\right)\chi_{21} + \left(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}\right)\chi_{12}
\end{aligned} \qquad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{i3} &= \left(\gamma+\varepsilon\right)\chi_{i3} + \left(\gamma-\varepsilon\right)\chi_{3i} \\
\mu_{3i} &= \left(\gamma+\varepsilon\right)\chi_{3i} + \left(\gamma-\varepsilon\right)\chi_{i3}
\end{aligned} \qquad i = 1,2 \qquad (1.7)$$

где $\alpha,\beta,\varepsilon,\overline{\gamma}_1$ –новые упругие постоянные в плоскости изотропии, $\overline{\gamma},\overline{\beta},\overline{\varepsilon}$ –новые упругие постоянные в плоскостях, нормальных плоскости изотропии.

Уравнения (1.1)–(1.7), решая относительно компонент несимметричного тензора деформации γ_{ji} и тензора изгиба-кручения χ_{ji}, примут вид:

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\overline{\nu}}{\overline{E}}\sigma_{33} \\
\gamma_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\overline{\nu}}{\overline{E}}\sigma_{33} \\
\gamma_{33} &= -\frac{\overline{\nu}}{\overline{E}}\sigma_{11} - \frac{\overline{\nu}}{\overline{E}}\sigma_{22} - \frac{1}{\overline{E}}\sigma_{33}
\end{aligned} \qquad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21} \\
\gamma_{21} &= \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}
\end{aligned} \qquad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{i3} &= \frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}\sigma_{i3} - \frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}\sigma_{3i} \\
\gamma_{3i} &= \frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}\sigma_{3i} - \frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}\sigma_{i3}
\end{aligned} \qquad i = 1,2 \qquad (1.10)$$

и далее

$$\chi_{11}=\frac{\left(2\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right)\bar{\gamma}_3-\beta^2}{\Delta_2}\mu_{11}-\frac{\bar{\beta}\bar{\gamma}_3-\beta^2}{\Delta_2}\mu_{22}-\frac{2\beta\bar{\gamma}}{\Delta_2}\mu_{33}$$

$$\chi_{22}=\frac{\left(2\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right)\bar{\gamma}_3-\beta^2}{\Delta_2}\mu_{22}-\frac{\bar{\beta}\bar{\gamma}_3-\beta^2}{\Delta_2}\mu_{11}-\frac{2\beta\bar{\gamma}}{\Delta_2}\mu_{33} \qquad (1.11)$$

$$\chi_{33}=\frac{4\bar{\gamma}\left(\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right)}{\Delta_2}\mu_{33}-\frac{2\beta\bar{\gamma}}{\Delta_2}\mu_{11}-\frac{2\beta\bar{\gamma}}{\Delta_2}\mu_{22}$$

$$\chi_{12}=\frac{\bar{\gamma}+\bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}\mu_{12}-\frac{\bar{\gamma}-\bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}\mu_{21}$$

$$\chi_{21}=\frac{\bar{\gamma}+\bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}\mu_{21}-\frac{\bar{\gamma}-\bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}}\mu_{12} \qquad (1.12)$$

$$\chi_{i3}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{i3}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{3i}$$

$$i=1,2 \qquad (1.13)$$

$$\chi_{3i}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{3i}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{i3}$$

где

$$\Delta_2=4\bar{\gamma}\left[\left(\bar{\gamma}+\bar{\beta}\right)\bar{\gamma}_3-\beta^2\right] \qquad (1.14)$$

Очевидно, к приведенным выше уравнениям должны быть присоединены уравнения равновесия, которые имеют вид [2]

$$\sigma_{ji,j}+X_i=\rho\ddot{u}_i \qquad (1.15)$$

$$\in_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}+Y_i=J\ddot{\omega}_i \qquad (1.16)$$

где u_i и ω_i –компоненты перемещения и поворота соответственно, X_i и Y_i – компоненты объемной силы и объемного момента соответственно, ρ –плотность, J –мера инерции при вращении, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в единице объема [10], $\in_{ijk}$ –тензор Леви-Чивиты $\left(\in_{123}=\in_{231}=\in_{312}=1,\ \in_{213}=\in_{132}=\in_{321}=-1, \in_{ijk}=0\right)$

Далее, для компонент несимметричного тензора деформаций γ_{ij} и тензора изгиба-кручения χ_{ji} имеем [2]

$$\gamma_{ij}=u_{i,j}-\in_{kji}\omega_k \qquad (1.17)$$

$$\chi_{ji}=\omega_{i,j} \qquad (1.18)$$

а также 18 условий совместности

$$\chi_{ji,\ell}=\chi_{\ell i,j} \qquad (1.19)$$

$$\gamma_{\ell i,h}-\gamma_{\ell i,h}+\in_{kih}\chi_{\ell k}-\in_{ki\ell}\chi_{hk}=0 \qquad (1.20)$$

Для полноты картины приведем также выражение удельной потенциальной энергии деформации трансверсально изотропного тела

$$U=\frac{2\mu+\lambda}{2}\left(\gamma_{11}^2+\gamma_{22}^2\right)+\frac{\bar{E}\left(1-\nu^2\right)}{2E\Delta_1}\gamma_{33}^2+\lambda\gamma_{11}\gamma_{22}+\bar{\lambda}\gamma_{33}\left(\gamma_{11}+\gamma_{22}\right)+$$

$$+\frac{\mu+\alpha}{2}\left(\gamma_{12}^2+\gamma_{21}^2\right)+(\mu-\alpha)\gamma_{12}\gamma_{21}+\frac{\bar{\mu}+\bar{\alpha}}{2}\left(\gamma_{13}^2+\gamma_{23}^2+\gamma_{31}^2+\gamma_{32}^2\right)+$$

$$+\left(\bar{\mu}-\bar{\alpha}\right)\left(\gamma_{13}\gamma_{31}+\gamma_{23}\gamma_{32}\right)+\frac{2\bar{\gamma}+\bar{\beta}}{2}\left(\chi_{11}^2+\chi_{22}^2\right)+\frac{\bar{\gamma}_3}{2}\chi_{33}^2+\bar{\beta}\chi_{11}\chi_{22}+$$

$$+\beta\chi_{33}\left(\chi_{11}+\chi_{22}\right)+\frac{\bar{\gamma}+\bar{\varepsilon}}{2}\left(\chi_{12}^2+\chi_{21}^2\right)+\left(\bar{\gamma}-\bar{\varepsilon}\right)\chi_{12}\chi_{21}+$$

$$+\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\left(\chi_{13}^2+\chi_{23}^2+\chi_{31}^2+\chi_{32}^2\right)+(\gamma-\varepsilon)\left(\chi_{13}\chi_{31}+\chi_{23}\chi_{32}\right) \qquad (1.21)$$

Очевидно, выполняя следующие процедуры:

$$\sigma_{ji}=\frac{\partial U}{\partial\gamma_{ji}},\quad \mu_{ji}=\frac{\partial U}{\partial\chi_{ji}} \qquad (1.22)$$

получим приведенные выше уравнения состояния (1.1)- (1.3) и (1.5)-(1.7).

Таким образом, основные уравнения и соотношения упругости трансверсально изотропного тела с учетом моментных напряжений записаны. Теперь, в отличие от классической микрополярной теории упругости, где мы имеем шесть упругих постоянных $E,\nu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$, здесь фигурируют четырнадцать – $E,\nu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\quad \bar{E},\bar{\nu},\bar{\mu},\bar{\alpha},\bar{\gamma},\bar{\varepsilon},\bar{\beta},\bar{\gamma}_3$, из которых $\bar{E},\bar{\nu},\ \bar{\mu}=G_{13}=G_{23}=G'$ имеются и в классическом трансверсально изотропном материале.

2. Рассмотрим тонкую трансверсально изотропную пластинку постоянной толщины h. Пусть срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью координат x_1Ox_2. Пусть также в каждой точке пластинки плоскость изотропии параллельна срединной плоскости пластинки. Пластинка загружена лишь поверхностными силами, нормально приложенными к плоскостям $x_3=\pm\frac{h}{2}$. При этом, очевидно, граничные (поверхностные) условия будут иметь вид

$$\sigma_{33}=Z^+,\ \sigma_{31}=0,\ \sigma_{32}=0\ \text{ при }\ x_3=\frac{h}{2}$$

$$\sigma_{33}=-Z^-,\ \sigma_{31}=0,\ \sigma_{32}=0\ \text{ при }\ x_3=-\frac{h}{2} \qquad (2.1)$$

$$\mu_{33}=0,\ \mu_{31}=0,\ \mu_{32}=0\quad \text{ при }\ x_3=\pm\frac{h}{2}$$

В основу предлагаемой здесь теории пластин ставятся следующие гипотезы [5, 8].

а) Нормальные к срединной плоскости пластинки перемещения u_3 и повороты относительно координатных линий $u_3-\omega_3$ не зависят от координаты x_3;

б) Касательные напряжения σ_{13} и σ_{23} по толщине пластинки меняются по заданному закону $f(x_3)$;

в) Силовые σ_{33}, σ_{31}, σ_{32} и моментные μ_{33}, μ_{31}, μ_{32} напряжения пренебрежимо малы. При необходимости они могут быть определены из уравнений равновесия (1.15), (1.16).

Согласно гипотезе а) из (1.17) и (1.18) получим

$$\gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \; u_3 = w(x_1, x_2) \tag{2.2}$$

$$\chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = 0, \; \omega_3 = \psi_3(x_1, x_2) \tag{2.3}$$

где $w(x_1, x_2)$–искомое нормальное перемещение, $\psi_3(x_1, x_2)$–искомый поворот вокруг координатных линий x_3.

Согласно гипотезе б) для напряжений σ_{13} и σ_{23} запишем [5]

$$\sigma_{13} = f(x_3)\psi_1(x_1, x_2), \; \sigma_{23} = f(x_3)\psi_2(x_1, x_2) \tag{2.4}$$

где $\psi_i(x_1, x_2)$–произвольные искомые функции, характеризующие поперечные касательные напряжения, $f(x_3)$–заданная функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине пластинки, в частности,

$$f(x_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - x_3^2\right) \tag{2.5}$$

Из (1.10), согласно (1.17), (2.4) и предположения в), для компонент деформации γ_{13} и γ_{23} имеем:

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_2 = \frac{\overline{\mu} + \overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}} f(x_3)\psi_1$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \omega_1 = \frac{\overline{\mu} + \overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}} f(x_3)\psi_2$$

откуда для двух оставшихся компонент тензора поворота получим

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\overline{\mu} + \overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}} f(x_3)\psi_2 \tag{2.6}$$

$$\omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\overline{\mu} + \overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}} f(x_3)\psi_1 \tag{2.7}$$

Из (1.10), согласно (1.17), (2.4), предположения в) и представлений (2.6), (2.7), для компонент деформации γ_{31} и γ_{32} имеем

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\overline{\mu} + \overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}} f(x_3)\psi_1 = -\frac{\overline{\mu} - \overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}} f(x_3)\psi_1$$

$$\gamma_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{\overline{\mu} + \overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}} f(x_3)\psi_2 = -\frac{\overline{\mu} - \overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}} f(x_3)\psi_2$$

Разрешая эти уравнения относительно тангенциальных компонент перемещения u_1 и u_2 в предположении, что при x_3=0, u_1= $u(x_1, x_2)$, u_2= $v(x_1, x_2)$, получим

$$u_1 = u - x_3\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{2\overline{\mu}} I_0(x_3)\psi_1 \tag{2.8}$$

$$u_2 = v - x_3\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{1}{2\overline{\mu}} I_0(x_3)\psi_2 \tag{2.9}$$

где $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$–искомые тангенциальные перемещения срединной плоскости пластинки,

$$I_0(x_3)=\int_0^{x_3} f(x_3)dx_3=\frac{x_3}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{x_3^2}{3}\right) \tag{2.10}$$

Таким образом, мы получили двумерную задачу с шестью искомыми функциями $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$, $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$, $\psi_3(x_1, x_2)$, через которые с помощью формул (1.17) и (1.18) могут быть представлены все компоненты тензоров деформации и изгиба-кручения.

3. Подставляя значения перемещений u_i и поворотов ω_i соответственно из (2.2), (2.3), (2.6)-(2.9) в (1.17) и (1.18), получим значения компонент тензора деформаций и тензора изгиба-кручения. Подставляя эти значения в (1.1), (1.2) и (1.5), (1.7), для напряжений получим:

силовые напряжения

$$\sigma_{11}=B\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)-x_3B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\frac{B}{2\overline{\mu}}I_0\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) \tag{3.1}$$

$$\sigma_{22}=B\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)-x_3B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\frac{B}{2\overline{\mu}}I_0\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right) \tag{3.2}$$

которые получены с использованием гипотезы в)

$$\sigma_{12}=(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}+\eta'\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-x_3 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\psi_3+\frac{\mu+\alpha}{2\overline{\mu}}I_0\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\eta'\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right) \tag{3.3}$$

$$\sigma_{21}=(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\eta'\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)-x_3 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\psi_3+\frac{\mu+\alpha}{2\overline{\mu}}I_0\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\eta'\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right) \tag{3.4}$$

где

$$B=\frac{E}{1-\nu^2},\quad \eta'=\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha} \tag{3.5}$$

а также, согласно гипотез б)

$$\sigma_{13}=f(x_3)\psi_1,\quad \sigma_{23}=f(x_3)\psi_2 \tag{3.6}$$

Моментные напряжения

$$\mu_{11}=2\overline{\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-f(x_3)\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}C\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\xi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right) \tag{3.7}$$

$$\mu_{22}=-2\overline{\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+f(x_3)\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}C\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}-\xi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right) \tag{3.8}$$

которые получены с использованием гипотезы в)

$$\mu_{12}=-(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon})\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\overline{\eta}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+f(x_3)\overline{K}_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\overline{\eta}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) \tag{3.9}$$

$$\mu_{21}=(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon})\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\overline{\eta}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)-f(x_3)\overline{K}_1\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\overline{\eta}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right) \tag{3.10}$$

где

$$K_1 = \frac{(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon})(\overline{\mu}+\overline{\alpha})}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}, \quad \overline{\eta} = \frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}} = \frac{\overline{K}_2}{\overline{K}_1} \tag{3.11}$$

$$C = \frac{\overline{\gamma}_3(2\overline{\gamma}+\overline{\beta})-\beta^2}{\overline{\gamma}_3}, \quad \xi = \frac{\overline{\beta}\overline{\gamma}_3-\beta^2}{\overline{\gamma}_3(2\overline{\gamma}+\overline{\beta})-\beta^2} = \frac{C_{12}}{C} \tag{3.12}$$

$$\overline{K}_2 = \frac{(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon})(\overline{\mu}+\overline{\alpha})}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}, \quad C_{12} = \frac{\overline{\beta}\overline{\gamma}_3-\beta^2}{\overline{\gamma}_3} \tag{3.13}$$

далее, согласно гипотезе в) из (1.13) имеем:

$$\chi_{13} = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{23} \tag{3.14}$$

откуда для моментных напряжений получим

$$\mu_{13} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}, \quad \mu_{23} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} \tag{3.15}$$

4. Этим напряжениям соответствуют эквивалентные усилия и моменты, которые запишутся следующим образом [5, 8]:
От силовых напряжений внутренние усилия –

$$T_{11} = Bh\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial v}{\partial x_2}\right), \quad T_{22} = Bh\left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \tag{4.1}$$

$$S_{12} = (\mu+\alpha)h\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \eta'\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - 2\alpha h\psi_3, \quad N_{13} = \frac{h^3}{12}\psi_1 \tag{4.2}$$

$$S_{21} = (\mu+\alpha)h\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \eta'\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + 2\alpha h\psi_3, \quad N_{23} = \frac{h^3}{12}\psi_2 \tag{4.3}$$

От силовых напряжений внутренние моменты –

$$M_{11} = -\frac{Bh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \frac{Bh^5}{240\overline{\mu}}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) \tag{4.4}$$

$$M_{22} = -\frac{Bh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) + \frac{Bh^5}{240\overline{\mu}}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right) \tag{4.5}$$

$$H_{12} = -2\mu\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{(\mu+\alpha)h^5}{240\overline{\mu}}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \eta'\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right) \tag{4.6}$$

$$H_{21} = -2\mu\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{(\mu+\alpha)h^5}{240\overline{\mu}}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \eta'\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right) \tag{4.7}$$

От моментных напряжений внутренние крутящие (P_{ii}), изгибающие (R_{ij}) и планарные (Q_i) моменты –

$$P_{11} = 2\overline{\gamma}h\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{h^3}{12}\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}C\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \xi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right) \tag{4.8}$$

$$P_{22}=-2\gamma h\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{h^3}{12}\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}C\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}-\xi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right) \tag{4.9}$$

$$R_{12}=-(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon})h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\overline{\eta}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\frac{h^3}{12}K_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\overline{\eta}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) \tag{4.10}$$

$$R_{21}=(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon})h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\overline{\eta}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)-\frac{h^3}{12}K_1\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\overline{\eta}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right) \tag{4.11}$$

$$Q_{13}=\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}h\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1},\quad Q_{23}=\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}h\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} \tag{4.12}$$

Из (1.15) и (1.16) получим восемь осредненных по толщине пластинки уравнений движения, во внутренних усилиях и моментах

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial S_{12}}{\partial x_1}=\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-Z_2+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad Z_2=Z^++Z^- \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial H_{21}}{\partial x_2}-\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{31}dx_3=-\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}+\rho\frac{h^5}{240\overline{\mu}}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial H_{12}}{\partial x_1}-\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{32}dx_3=-\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}+\rho\frac{h^5}{240\overline{\mu}}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial R_{21}}{\partial x_2}+N_{23}-\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{32}dx_3=Jh\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}-\frac{Jh^3}{12}\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial R_{12}}{\partial x_1}-N_{13}+\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{31}dx_3=-Jh\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}+\frac{Jh^3}{12}\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2}+S_{12}-S_{21}=Jh\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{4.19}$$

К этим уравнениям присоединяются граничные условия, некоторые из которых для края $x_1=0$ запишутся следующим образом [8]:

а) Свободный край –

$$T_{11}=0,\ S_{12}=0,\ Q_{13}=0,\ M_{11}+R_{12}=0,\ H_{12}+P_{11}=0,\ N_{13}=0 \tag{4.20}$$

б) Шарнирно опертый край –

$$T_{11}=0,\ S_{12}=0,\ Q_{13}=0,\ M_{11}+R_{12}=0,\ H_{12}+P_{11}=0,\ w=0 \tag{4.21}$$

в) Жестко заделанный край

$$u=0,\ v=0,\ w=0,\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}=0,\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}=0,\ w=0 \tag{4.22}$$

Из предпоследних четырех уравнений движения, исключая $\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{31}dx_3$ и $\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{32}dx_3$, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(P_{11}-H_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_{21}-M_{22}\right)+N_{23}=\left(Jh+\rho\frac{h^3}{12}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}-$$
$$-\frac{h^3}{48\bar{\mu}}\left(\frac{\bar{\mu}+\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}J+\frac{h^2}{5}\rho\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial t^2} \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(P_{22}+H_{21}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R_{12}+M_{11}\right)-N_{13}=-\left(Jh+\rho\frac{h^3}{12}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}+$$
$$+\frac{h^3}{48\bar{\mu}}\left(\frac{\bar{\mu}+\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}J+\frac{h^2}{5}\rho\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial t^2} \tag{4.24}$$

Таким образом, мы получили шесть дифференциальных уравнений движения пластинки во внутренних усилиях и моментах (4.13), (4.14), (4.19), (4.23), (4.24).

5. Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (4.1)-(4.12) в полученные выше шесть уравнений движения, окончательно получим следующую систему из шести дифференциальных уравнений, записанных в искомых функциях $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$, $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$, $\psi_3(x_1, x_2)$, через которые представлены все расчетные величины задачи:

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+(B_{12}+\mu-\alpha)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5.1}$$

$$B\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+(B_{12}+\mu-\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5.2}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)=-\frac{Z_2}{h}+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{5.3}$$

$$\bar{A}\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w-\frac{h^2}{48\bar{\mu}}\left(\bar{A}_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+\bar{A}_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}+\bar{A}_3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{h^2}{12}\psi_1=$$
$$=\left(J+\frac{h^2}{12}\rho\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}-\frac{h^2}{48\bar{\mu}}\left(\frac{\bar{\mu}+\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}J+\frac{h^2}{5}\rho\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \tag{5.4}$$

$$\bar{A}\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w-\frac{h^2}{48\bar{\mu}}\left(\bar{A}_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}+\bar{A}_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}+\bar{A}_3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{h^2}{12}\psi_2=$$
$$=\left(J+\frac{h^2}{12}\rho\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}-\frac{h^2}{48\bar{\mu}}\left(\frac{\bar{\mu}+\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}J+\frac{h^2}{5}\rho\right)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} \tag{5.5}$$

$$\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{2\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_2^2}\right)-2\alpha\psi_3=\frac{J}{2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{5.6}$$

где

$$\bar A=\frac{Bh^2}{12}+\bar\gamma+\bar\varepsilon,\quad \bar A_1=\frac{Bh^2}{5}+\frac{(\bar\mu+\bar\alpha)(\gamma+\varepsilon)}{\bar\alpha}$$

$$\bar A_2=\frac{(\mu+\alpha)h^2}{5}+\frac{\bar\mu+\bar\alpha}{\bar\alpha}C,\ \bar A_3=(B_{12}+\mu-\alpha)\frac{h^2}{5}-\frac{(\bar\mu+\bar\alpha)(C_{12}+\bar\gamma-\bar\varepsilon)}{\bar\alpha} \tag{5.7}$$

Рассматривая эту систему уравнений, замечаем, что уравнения (5.1), (5.2) и (5.6) совместно с соответствующими граничными условиями составляют замкнутую систему уравнений плоской задачи трансверсально изотропной пластинки с искомыми u, v, ψ_3. Остальные же три уравнения (5.3), (5.4), (5.5) с соответствующими граничными условиями представляют задачу поперечного изгиба пластинки с искомыми w, ψ_1, ψ_2.

6. Введем обобщающую упругую постоянную $\bar l$, которая имеет размерность длины [8,11]

$$\bar l^2=(\bar\mu+\bar\alpha)(\bar\gamma+\bar\varepsilon)/4\bar\mu\bar\alpha \tag{6.1}$$

Этот коэффициент содержит лишь трансверсальные упругие постоянные. Согласно (6.1), для коэффициентов $\bar A$, $\bar A_i$ имеем

$$\bar A=\frac{Bh^2}{12}\left(1+48\frac{\bar\mu}{B}\frac{\bar\alpha}{\bar\mu+\bar\alpha}\frac{\bar l^2}{h^2}\right),\quad \bar A_1=\frac{Bh^2}{5}\left(1+20\frac{\bar\mu}{B}\frac{\bar l^2}{h^2}\right)$$

$$\bar A_2=\frac{(\mu+\alpha)h^2}{5}\left[1+\frac{20\bar\mu C}{(\mu+\alpha)(\bar\gamma+\bar\varepsilon)}\frac{\bar l^2}{h^2}\right] \tag{6.2}$$

$$\bar A_3=\frac{(B_{12}+\mu-\alpha)h^2}{5}\left[1-\frac{20\bar\mu(C_{12}+\bar\gamma-\bar\varepsilon)}{(\bar\gamma+\bar\varepsilon)(B_{12}+\mu-\alpha)}\frac{\bar l^2}{h^2}\right]$$

7. Для иллюстрации рассмотрим три модельных примера.

а) Изгиб шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки $a\times b$, под действием нормально приложенной синусоидальной нагрузки. Нагрузка распределена по закону

$$z_3=q\cdot\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b} \tag{7.1}$$

Система исходных дифференциальных уравнений избига пластинки, согласно (6.3)-(6.5) и (7.1), имеет вид

$$\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)=-q\cdot\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b} \tag{7.2}$$

$$\bar A\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w-\frac{h^2}{48\bar\mu}\left(\bar A_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+\bar A_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}+\bar A_3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{h^2}{12}\psi_1=0$$

$$\bar{A}\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w-\frac{h^2}{48\bar{\mu}}\left(\bar{A}_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}+\bar{A}_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}+\bar{A}_3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{h^2}{12}\psi_2=0$$

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\text{при } x_1=0,\ x_1=a \quad w=0,\ M_{11}+R_{12}=0,\ \psi_2=0$$

$$\text{при } x_2=0,\ x_2=b \quad w=0,\ M_{22}+R_{21}=0,\ \psi_1=0 \tag{7.3}$$

Полагая

$$w=C_1\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b},\quad \psi_1=C_2\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}$$

$$\psi_2=C_3\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b} \tag{7.4}$$

удовлетворим граничным условиям (7.3), а из системы уравнений (7.2), с учетом (6.1), а также равенства $\bar{A}_1=\bar{A}_2+\bar{A}_3$, для коэффициентов C_i получим

$$C_1=\frac{q}{\bar{A}h}\frac{a^4b^4}{\pi^4\left(a^2+b^2\right)^2}\left[1+\frac{\pi^2B}{20\bar{\mu}}\frac{h^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2}\left(1+20\frac{\bar{\mu}}{B}\frac{\bar{l}^2}{h^2}\right)\right]$$

$$C_2=\frac{ab}{a^2+b^2}\frac{12qb}{\pi h^3},\quad C_3=\frac{ab}{a^2+b^2}\frac{12qa}{\pi h^3} \tag{7.5}$$

Рассматривая значения C_i, замечаем, что, как и следовало ожидать, C_2 и C_3 имеют классическое представление [5,8], а C_1 существенно отличается от классики. Здесь вместо классической жесткости $Bh^3/12$ имеем новое представление

$$\bar{A}h=\frac{Bh^3}{12}\left(1+48\frac{\bar{\mu}}{B}\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\mu}+\bar{\alpha}}\frac{\bar{l}^2}{h^2}\right) \tag{7.6}$$

которое содержит поправку к классической жесткости, с новыми упругими постоянными трансверсального происхождения.

Подставляя значения C_i в (7.4) и далее в (3.1)-(3.10) и (4.1)-(4.12), получим соответствующие формулы для определения всех расчетных величин рассмотренной задачи.

б) Поперечные колебания пластинки. Одномерная задача. Исходная система дифференциальных уравнений колебаний пластинки в общем случае одномерной задачи согласно (5.1)-(5.6) имеет вид

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.7}$$

$$(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-2\alpha\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{7.8}$$

$$\alpha\frac{\partial v}{\partial x_1}+2\frac{\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_1^2}-2\alpha\psi_3=\frac{J}{2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{7.9}$$

$$\frac{h^2}{12}\frac{\partial\ \psi_1}{\partial x_1}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{7.10}$$

$$\overline{A}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}-\frac{h^2}{48\overline{\mu}}\overline{A}_1+\frac{h^3}{12}\psi_1=\left(J+\frac{h^2}{12}\rho\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}-\frac{h^2}{48\overline{\mu}}\left(\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}}J+\frac{h^2}{5}\rho\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \tag{7.11}$$

$$\frac{h^2}{48\overline{\mu}}A_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}-\frac{h^2}{12}\psi_2=\frac{h^2}{48\overline{\mu}}\left(\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}}J+\frac{h^2}{5}\rho\right)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} \tag{7.12}$$

Эта система с точностью до обозначений досконально изучена в [8]. Здесь мы рассмотрим лишь поперечные колебания пластинки без учета инерций вращения и поворота. Задача эта описывается системой уравнений (7.10) и (7.11), (7.12) без правых частей.

Пусть по краям пластинки шириной a имеем следующие граничные условия:

при $x_1=0,\ x_1=a \qquad w=0,\ M_{11}+R_{12}=0,\ H_{12}+P_{11}=0$ (7.13)

Решение ищем в форме (Ψ_2=0)

$$w=C_1\sin\lambda_m x_1\cos\omega_m t,\quad \psi_1=C_2\cos\lambda_m x_1\cos\omega_m t \tag{7.14}$$

где $\lambda_m=m\pi/a$, m – целое число, ω_n–искомые частоты колебаний, соответствующие функциям $w(x_1,t)$ и $\psi_1(x_1,t)$. Подставляя значения w и ψ_1 из (7.14) в уравнения (7.10) и (7.11) (однородное), получим систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_i. Приравнивая нулю определитель этой однородной системы для квадрата частоты колебаний пластинки, с учетом (6.1), получим

$$\omega_m^2=\frac{\dfrac{Bh^2}{12}\lambda_m^4\left(1+48\dfrac{\overline{\mu}}{B}\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}\dfrac{l^2}{h^2}\right)}{\left[1+\dfrac{Bh^2}{20\overline{\mu}}\left(1+20\dfrac{\overline{\mu}}{B}\dfrac{l^2}{h^2}\right)\lambda_m^2\right]\rho} \tag{7.15}$$

Как и в предыдущей задаче, поправка к классической теории [12] существенным образом зависит от новых постоянных упругости.

в) Задача устойчивости пластинки. Рассмотрим модельную задачу об устойчивости длинной прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по длинным сторонам $x_1=0$, $x_1=a$, сжатой в своей плоскости (по этим же сторонам) равномерно распределенной нагрузкой интенсивности p. Будем полагать, что изогнутая поверхность пластинки-цилиндрическая [5,8,12]. В этом случае система исходных дифференциальных уравнений, согласно (5.1)-(5.6), а также известных положений классической теории устойчивости [5, 12], перепишется следующим образом:

$$\frac{h^3}{12}\frac{d\psi_1}{dx_1}+T_{11}^0\frac{d^2w}{dx_1^2}=0$$

$$\overline{A}\frac{d^3w}{dx_1^3}-\frac{h^2}{48\overline{\mu}}\overline{A}_1\frac{d^2\psi_1}{dx_1^2}+\frac{h^2}{12}\psi_1=0 \tag{7.16}$$

$$\frac{h^2}{48\overline{\mu}}\overline{A}_2\frac{d^2\psi_2}{dx_1^2}-\frac{h^2}{12}\psi_2=0$$

где T_{11}^0 — внутреннее тангенциальное усилие начального плоского напряженного состояния пластинки.

К системе уравнений (7.16) присоединим граничные условия шарнирного опирания

$$\text{при } x_1=0,\ x_1=a \qquad w=0,\ M_{11}+R_{12}=0,\ H_{12}+P_{11}=0 \tag{7.17}$$

Теперь, очевидно, что в рассматриваемом случае $\psi_2=0$, а в предположении, что имеет место начальное плоское напряженное состояние [5,8,12], получим $T_{11}^0=-p$.

Решение системы (7.16), теперь уже состоящую из двух уравнений, ищем в форме

$$w=C_1\sin\frac{m\pi x_1}{a},\quad \psi_1=C_2\cos\frac{m\pi x_2}{a} \tag{7.18}$$

где C_i — произвольные постоянные, m — целое число.

Подставляя значения w и ψ_1 из (7.18) в систему (7.16), получим систему алгебраических уравнений относительно C_i. Приравнивая нулю определитель этой однородной системы, с учетом (6.1) для критический силы получим

$$P_m^*=\frac{Bh^3}{12}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{1+48\dfrac{\overline{\mu}}{B}\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}\dfrac{\overline{l}^2}{h^2}}{1+\dfrac{Bh^2}{20\overline{\mu}}\dfrac{m^2\pi^2}{a^2}\left(1+20\dfrac{\overline{\mu}}{B}\dfrac{\overline{l}^2}{h^2}\right)} \tag{7.19}$$

Здесь множителем этой формулы является значение критической силы, найденное по классической теории [12]. Как и следовало ожидать, и в этом случае имеем поправочные члены, существенно зависящие от новых постоянных упругости.

Рассматривая (7.5), (7.6), (7.15), (7.19), замечаем, что все поправки существенным образом зависят от отношения $\overline{l}/h$. Новое обобщающее упругое постоянное $\overline{l}$ является малой величиной, и естественно, поправки от учета моментных напряжений могут быть заменены лишь при малых абсолютных значениях толщины пластинки h.

Рассматривая формулы (7.15) и (7.19), замечаем, что в числителях этих формул стоят поправки от учета моментных напряжений. Что же касается знаменателей, то здесь мы имеем как поправку от учета моментных напряжений, так и от специфичного учета явлений поперечного сдвига. Последнее в силу произвольности $\overline{\mu}$, для трансверсально изотропного материала, поправку от учета поперечных сдвигов может сделать значительным, тем более при определенных значениях m и h/a.

Благодарю М.В. Белубекяна за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: Hermann, 1909. 226p.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
3. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. //Механика. Переводн. сб. переводов иностр. статей. 1964. №4. С.115-128.
4. Савин Г.Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: Изд. Киевского ун-та, 1965. 162 с.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
6. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Ленинград: Изд. Ленинградского ун-та, 1978. 182 с.
7. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. Московского ун-та, 1999. 327 с.
8. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 214 с.
9. Jones R.M. Mechanics of composite materials. Ann Arbor: Taylors Francis. 1999. 519 p.
10. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости //ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
11. Кириллов Ю.В., Постнов А.А., Тюленев А.И. Исследования по теории пластин и оболочек моментной теории упругости. Исследования по теории пластин и оболочек // Сб.: Казань: Изд. Казанск.ун-та, 1990, вып.20. С. 18-43.
12. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеориздат. 1957. 463 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 18.10.2000