ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №4, 2000 Механика

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Шагинян С.Г.

Ս.Գ. Շահինյան
Ուշացող արգումենտով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության մասին

Դիտարկվում է ուշացող արգումենտով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի կայունության խնդիրը, երբ համակարգի վրա ժամանակի վերջավոր միջակայքում ազդում են ինտեգրալով փոքր գրգռող ուժեր:

Տրված է ըստ ազդող ուժի կայունության սահմանումը այդպիսի համակարգերի լուծումների համար: Ստացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում համակարգի տրիվյալ լուծումը ասիմպտոտիկ կայուն է ամբողջում սովորական իմաստով: Որոշված են նաև պայմաններ գծային համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության համար:

S.G.Shahinyan
On the stability of acting force of the systems of differential equation with time lags.

Рассматривается задача устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, когда на систему на конечном промежутке времени действуют интегрально малые возмущающие силы, т.е. силы, которые выбираются из более широких классов функций, чем при постоянно действующих возмущениях. Они могут быть импульсными силами конечной мощности.

Получены достаточные условия, при которых тривиальное решение системы асимптотически устойчиво в целом в обычном смысле. Определены также условия, при которых линейная система устойчива по действующей силе.

1. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = F(x(t); x(t-\tau)) \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$; $F : R^{2n} \to R^n$ – непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая всем условиям существования и единственности решений системы (1.1) ([1], с. 31) в компактном множестве

$$M = \left\{x(\tau);\ \|x(\cdot)\|_h < \infty;\ \tau \in [0;h];\ h > 0\right\} \tag{1.2}$$

и $F(0) = 0$.

Норму вектор-функции $x(\tau)$ можно выбрать различными способами. Целесообразно здесь выбрать в виде

$$\|x(\cdot)\|_h = \left[\int_{-h}^{0} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{2}}$$

Докажем следующую теорему, аналогичную теореме Барбашина-Красовского об устойчивости в целом для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2]:

Теорема 1. Если для системы (1.1) существует определенно-положительный функционал $V(x(\cdot))$, определенный на функции $x(\tau) \in M$, для которого

а) $\lim\limits_{\|x(\cdot)\|_h \to \infty} V(x(\cdot)) = \infty$ (1.3)

б) производная $\dfrac{dV(x_\psi(t-\tau))}{dt}$ ([1], с. 141) вдоль интегральных кривых системы (1.1) неположительна, притом не существует ни одна целая полутраектория (кроме $x = 0$), вдоль которой $\dfrac{dV(x_\psi(t-\tau))}{dt} = 0$ (где $x_\psi(t-\tau)$ – решение системы (1.1), определяемое начальной вектор-функцией $\psi = \psi(t)$; $t_0 - h \le t < t_0$),

то решение $x \equiv 0$ системы (1.1) асимптоматически устойчиво в целом.

Доказательство. Так как для решения $x = 0$ системы (1.1) имеют место все условия теоремы об устойчивости ([1] с.141), то это решение устойчиво. Пусть $x = x_\psi(t-\tau)$ – такое решение системы (1.1), которое определяется некоторой начальной вектор-функцией $\psi = \psi(t)$, где $\psi = \psi(t)$ – непрерывная функция при $t \in [t_0 - h; \ t_0]$.

Обозначим через $K_\psi \subset M$ некоторый компакт, содержащий часть траектории $x_\psi(\tau)$ при $t = t_0$; $x_\psi(\tau) \in K_\psi \subset M$, и пусть $A = \sup\limits_{x_\psi(\tau) \in K_\psi} V(x_\psi(\cdot))$.

Так как $V(x_\psi(\cdot))$ – непрерывный функционал, а K_ψ – компактное множество, то $A < \infty$. Следовательно, согласно условию (1.3), существует число $H > 0$ такое, что $V(x(\cdot)) \le A$ при $\|x(\cdot)\|_h < H$ и $K_\psi \subset \{\|x(\cdot)\|_h \le H\}$. При этих условиях для системы (1.1) имеет место теорема Красовского об асимптотической устойчивости ([3], с.181), т.е. $\lim\limits_{t \to \infty} \|x(\cdot)\|_h = 0$. Откуда и следует асимптотическая устойчивость в целом решения $x \equiv 0$ системы (1.1).

Таким образом, вышеуказанная теорема доказана.

2. Снова рассмотрим систему (1) и систему

$$\dot{x} = F(x(t-\tau), x(t)) + \varphi(t) \tag{2.1}$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в [4];

а) $\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{t_0}^{T} \varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$

б) $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \ge T$

Здесь $T > t_0 + h$ – заданный момент времени.

Определение 1. Решение $x \equiv 0$ системы (1.1) назовем устойчивым по действующей силе, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$

такое, что для всех решений $x_\psi(t-\tau)$ системы (2.1) $\|x(\cdot)\|_h < \varepsilon$ при $t \ge T+h$, если $\|\psi(\tau)\|_h < \delta$, $\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta$.

Определение 2. Решение $x \equiv 0$ системы (1.1) назовем асимптотически устойчивым по действующей силе, если для каждого решения $x_\psi(t-\tau)$ системы (2.1) удовлетворяется условие $\lim_{t\to\infty}\|x_\psi(\cdot)\|_h = 0$ при всех непрерывных начальных функциях $\psi(t)$ и при $\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta$.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = Ax + Bx(t-\tau) \tag{2.2}$$

где A и B - $n\times n$ - постоянные матрицы, а $x \in R^n$.

Предположим, что все корни характеристического уравнения

$$|A-\lambda E| = 0 \tag{2.3}$$

имеют отрицательные вещественные части.

Покажем, что в этом случае система (2.2) асимптотически устойчива по действующей силе. Действительно, при вышеуказанных условиях для системы

$$\dot{x} = Ax \tag{2.4}$$

согласно теореме Ляпунова ([5], с. 106) существует определенно-положительная квадратичная форма

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_i x_j$$

такая, что

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.4)} = -\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Для системы (2.2) в качестве функции Ляпунова выбираем:

$$V(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{-h}^{0}x_i^2(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

где $\varepsilon_i \ge 0$ $(i=1,\dots,n)$ – сколь угодно малые числа.

Вычислим производную функционала $V(x(\cdot))$ вдоль решений системы (2.2):

$$\left.\frac{dV(x(t-\tau))}{dt}\right|_{(2.2)} = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j(t)\big(a_{i1}x_1(t)+\ldots+a_{in}x_n(t)\big)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j(t)\big(b_{i1}x_1(t-\tau)+\ldots+b_{in}x_n(t-\tau)\big)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\big(x_i^2(t)-x_i^2(t-\tau)\big)= \qquad (2.6)$$

$$=-\sum_{l=1}^{n}[(1-\varepsilon_l)x_l^2(t)-\sum_{j,l=1}^{n}\alpha_{ij}b_{jl}x_j(t)x_l(t-\tau)+x_l^2(t-\tau)]$$

Известно ([3], с. 196), что если $\|B\|_0=\beta>0$ $\left(\|B\|_0=\max\limits_i\sum\limits_j|b_{ij}|\right)$ достаточно малое число, то величины ε_i можно подобрать так, чтобы производная (2.6) была определенно-отрицательной (например, $\varepsilon_i=\dfrac{1}{2n}$, $i=1,\ldots,n$). Следовательно, для системы (2.2) имеют место все условия теоремы 1, откуда следует, что система (2.2) асимптотически устойчива в целом. Следовательно, согласно определению 2, она асимптотически устойчива и по действующей силе.

3. Предположим теперь, что в системе (2.2) $B=\mu A$ (μ-достаточно малое число) и корни уравнения (2.3) удовлетворяют следующим условиям

а) $\lambda_i=0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ притом $\operatorname{rang}A=n-k$ $(k\le n)$;

б) $\operatorname{Re}\lambda_j<0$ $(j=k+1,\ldots,n)$ (3.1)

Если корни уравнения (2.3) таковы, что существует хотя бы один корень с неотрицательной действительной частью, который не удовлетворяет условиям (3.1), то система (2.4) будет неустойчивой по действующей силе [6]. Следовательно, система (2.2) также будет неустойчивой по действующей силе.

Докажем следующую теорему:

Теорема 2. Если корни характеристического уравнения (2.3) системы (2.2) удовлетворяют условиям (3.1), то система (2.2) устойчива по действующей силе.

Доказательство. Известно, что если корни уравнения (2.3) удовлетворяют условиям (3.1), ([6], с.141), то существует такая матрица C $(\det C\ne 0)$, что

$$A_1=CAC^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0\ldots0 & 0\ldots\ldots\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots0 & 0\ldots\ldots\ldots0 \\ 0 & 0\ldots0 & d_{k+1\,k+1}\ldots d_{k+1\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots0 & d_{n\,k+1}\ldots d_{n\,n}\end{pmatrix}$$

Следовательно, $B_1 = CBC^{-1} = C\mu AC^{-1} = \mu CAC^{-1} = \mu A_1$.

Выполняя линейное преобразование $y = Cx$, систему (2.2) можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{y}_i = 0, \quad i = 1,\dots,k; \\ \dot{y}_j = d_{jk+1}y_{k+1} + \dots + d_{jn}y_n + \\ + \mu(d_{jk+1}y_{k+1}(t-\tau) + \dots + d_{jn}y_n(t-\tau)), \quad j = k+1,\dots,n \end{cases} \tag{3.2}$$

Выполняя такое же преобразование $y = Cx$ относительно системы

$$\dot{x} = Ax + Bx(t-\tau) + \varphi(t)$$

получим

$$\dot{y}_i = \nu_i(t) \quad (i = 1,\dots,k) \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d_{jk+1}y_{k+1}(t) + \dots + d_{jn}y_n(t) + \\ &+ \mu(d_{jk+1}y_{k+1}(t-\tau) + \dots + d_{jn}y_n(t-\tau) + \nu_j(t), \end{aligned} \quad (j = k+1,\dots,n) \tag{3.4}$$

где $\nu(t) = C\varphi(t)$ и если $\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{t}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{1/2} < \delta$,

то $\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{\tau}\nu_i(t)dt\right)^2\right]^{1/2} < \|C\|_n \cdot \delta = \delta_1$. Значит

$$\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\int_{t_0}^{\tau}\nu_i(t)dt\right)^2\right]^{1/2} < \delta_1 \text{ и } \left[\sum_{i=k+1}^{n}\left(\int_{t_0}^{\tau}\nu_i(t)dt\right)^2\right]^{1/2} < \delta_1$$

Интегрируя систему (3.2) отдельно, получим

$$y_i(t-\tau) = y_i(t_0-\tau) + \int_{t_0}^{t}\nu_i(\xi)d\xi \qquad (i = 1,\dots,k)$$

и $y_i(t-\tau) = y_i(t_0-\tau) + \int_{t_0}^{T}\nu_i(t)dt$ при $t \geq T + h$,

где $y(t_0-\tau)$ – начальная функция. Следовательно,

$$\|\bar{y}(t-\tau)\|_{h,(k)} \leq \|\bar{y}(t_0-\tau)\|_{h,(k)} + \left[\sum_{i=1}^{k}\left(\int_{t_0}^{t}\nu_i(t)dt\right)^2\right]^{1/2} < \delta + \delta_1 = \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.5}$$

если

$$\|\bar{y}(t_0-\tau)\|_{h,(k)} < \delta, \qquad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k \end{pmatrix}$$

через $\|y(\cdot)\|_{h,(m)}$ обозначена норма m-мерного функционального пространства.

Так как все корни характеристического уравнения системы

$$\dot{y}_j = d_{jk+1}y_{k+1} + \ldots + d_{jn}y_n \qquad (j = k+1,\ldots,n) \tag{3.6}$$

имеют отрицательные вещественные части, то, согласно теореме Ляпунова ([5], с. 106-108), существует определенно-положительная форма $V_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=k+1}^{n}\alpha_{ij}y_iy_j$ такая, что

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(3.6)} = -\sum_{i=k+1}^{n}y_i^2 \tag{3.7}$$

Для системы (3.2) в качестве функционала Ляпунова возьмем

$$V(\bar{\bar{y}}(\tau)) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=k+1}^{n}\alpha_{ij}y_iy_j + \sum_{i=k+1}^{n}\varepsilon_i\int_{-\tau}^{0}y_i^2(\xi)d\xi \tag{3.8}$$

где $\varepsilon \geq 0 \quad (i = k+1,\ldots,n)$ — достаточно малые числа, а

$$\bar{\bar{y}}(\tau) = \begin{pmatrix} y_{k+1}(\tau) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(\tau) \end{pmatrix}$$

Очевидно, что функционал $V(\bar{\bar{y}}(\cdot))$ определенно-положителен и

$$\lim_{\|y\|_{h,(n-k)}\to\infty} V(\bar{\bar{y}}(\cdot)) = \infty$$

Вычислим производную функционала $V(\bar{\bar{y}}(\cdot))$ вдоль решений системы (3.2)

$$\left.\frac{dV(y(t-\tau))}{dt}\right|_{(3.2)} = \sum_{i,j=k+1}^{n}\alpha_{ij}y_j(t)(d_{ik+1}y_{k+1}(t) + \ldots + d_{in}y_n(t)) +$$

$$+\mu\sum_{i,j=k+1}^{n}\alpha_{ij}y_j(t)(d_{ik+1}y_{k+1}(t-\tau) + \ldots + d_{in}y_n(t-\tau)) +$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n}\varepsilon_i(y_i^2(t) - y_i^2(t-\tau)) = -\sum_{i=k+1}^{n}y_i^2 +$$

$$+\mu\sum_{i,j=k+1}^{n}\alpha_{ij}y_j(t)(d_{ik+1}y_{k+1}(t-\tau) + d_{in}y_n(t-\tau) + \sum_{i=k+1}^{n}\varepsilon_i(y_i^2(t) - y_i^2(t-\tau)) =$$

$$= -\sum_{i=k+1}^{n}((1-\varepsilon_i)(y_i^2(t) - \mu \sum_{i,j=k+1}^{n} \alpha_{ij} d_{ij} y_j(t) y_i(t-\tau) + y_i^2(t-\tau)) \tag{3.9}$$

Правые части системы (3.2) удовлетворяют условиям

$$|\mu| \cdot |d_{jk+1} y_{k+1} + \dots + d_{jn} y_n| \le \alpha \cdot \|\overline{y}\|_{(n-k)} \tag{3.10}$$

где $\alpha = |\mu| \cdot \max_{i,j=k+1,\dots,n} |d_{ij}|$, $\qquad \|\overline{y}\|_{(n-k)} = (\sum_{i=k+1}^{n} y_i^2)^{1/2}$

Тогда квадратичная форма (3.9) при малых μ будет определенно-отрицательной ([3], с. 196). То есть, согласно теореме 1, для решений системы (3.2) будет иметь место условие

$$\lim_{t\to\infty} \|\overline{y}(t-\tau)\|_{h,(n-k)} = 0$$

Следовательно, существует такой момент времени $t_* \ge T + h$, что

$$\|\overline{y}(t-\tau)\|_{h,(n-k)} < \frac{\varepsilon}{2}; \text{ при } \quad t > t_* \tag{3.11}$$

Тогда, согласно (3.5) и (3.11), для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ и момент времени $t_* \ge T + h$ такие, что $\|y(t-\tau)\|_h < \varepsilon$ при $t > t_*$,

$$\|y(t_0 - \tau)\|_h < \delta \quad \text{и} \quad \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{t_*} \varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{1/2} < \delta.$$

Теорема доказана.

Автор статьи выражает свою искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Габриеляну М.С. за постоянное внимание к работе, а также за многие полезные советы и замечания.

Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 96-862, финансирующейся из государственных централизованных источников РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. 296 с.
2. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. – ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.
3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
4. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. О построении функции Ляпунова. – Уч. записки ЕГУ, 1987, № 1, с. 39-45.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М. – Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.
6. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. – Уч. записки ЕГУ, 1987, № 1, с. 39-46.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. 548 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 8.12.1999.