

УДК 62.50

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СХВАТОМ МАНИПУЛЯТОРА

Гукасян А.А., Степанян В.К.

Ա.Ա. Դուկասյան, Վ.Զ. Ստեփանյան  
Սանիտար-առողջապահության հեղինակալի ինժեներներ

Հիմնավորվում է մանիպուլյատորի քանիչի ղեկավարման խաղային խնդիրների դրվածքները, երբ յուրաքանչյուր ազատության աստիճան ում էրկու ղեկավարող ազդեցություններ Դինամիկ ծրագրավորման է երստրեմալ նշանառության մեթոդներով ուսումնասիրվում է տարրեր խաղային խնդիրներ, որովհետև մաթեմատիկային բազմություն է ղեկավարման ֆունկցիաների տարրեր սահմանափակումների ու բառակուսային ֆունկցիոնալի մինիմալիզացիայի դրվածքում:

A.A.Ghukasyan, V.K. Stepanyan  
Game problems of the manipulator's grasp

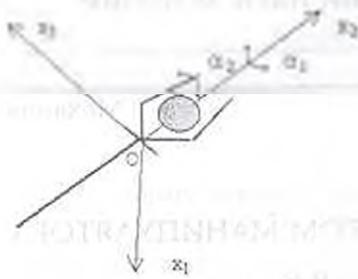
Приводится обоснование применения игровых постановок задачи управления схватом манипуляционных роботов, в случае, когда управление по каждой степени подвижности осуществляется двумя управляющими воздействиями. На основе метода динамического программирования и экстремального прицеливания исследованы разные игровые задачи с заданным целевым множеством при разных ограничениях на управляющие воздействия и их минимум-максимум квадратичного функционала.

**Введение.** Развитие робототехники в будущем предполагает совершенствование конструкции и управления с целью обеспечения более плавных и контролируемых движений, которые свойственны биологическим объектам. Этот путь развития приводит к созданию биотехнических объектов со многими элементами искусственного интеллекта. Контролируемые движения в этих системах можно осуществить с двумя или несколькими управляющими воздействиями, которые могут конфликтовать или содействовать в процессе движения в зависимости от полученной информации о складывающейся ситуации.

В работе делается попытка создать систему управления вышеуказанного типа для управления движением (ориентацией) схвата манипулятора с двумя степенями подвижности. Предполагается, что движения по каждой степени подвижности создаются двумя управляющими воздействиями, которые противодействуют между собой. Здесь конфликт имеет виртуальный характер и заключается в том, что одно из этих управляющих воздействий (первый игрок) исполняет роль движущей силы, а второе (второй игрок) – удерживающей, обеспечивая, тем самым, плавное (в широком смысле) движение схвата. Сформулированы разные игровые задачи управления, для исследования которых используется метод динамического программирования и экстремального прицеливания. [1-4]

1. Расчетная модель схвата и уравнения движений. Рассматривается схват манипулятора типичной конструкции [5], кинематическая схема которого представлена на фиг. 1. Движение (ориентация) схвата

происходит по степеням подвижности  $\alpha_1, \alpha_2$ , где  $\alpha_1$  характеризует



Фиг. 1

поворот относительно оси  $Ox_1$ , а  $\alpha_2$  — относительно оси  $Ox_2$ .

Динамика независимых движений схвата по указанным степеням подвижности описывается следующими дифференциальными уравнениями

$$I_i \ddot{\alpha}_i = Q_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где  $I_1, I_2$  — соответствующие моменты инерции относительно осей вращения.

$Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) — обобщенные управля-

ющие моменты, каждый из которых состоит из двух слагаемых

$$Q_i = n_i u_i - m_i v_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

Первые слагаемые в (1.2) являются движущими моментами  $n_i u_i$  ( $i = 1, 2$ ), а вторые  $m_i v_i$  ( $i = 1, 2$ ) — удерживающими.  $n_i, m_i$  ( $i = 1, 2$ ) — передаточные числа приводных систем или коэффициенты усиления [5].

После перехода к безразмерным переменным

$$t' = t/T, \quad u_i = n_i u_i T^2 / I_i, \quad v_i = m_i v_i T^2 / I_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

уравнения (1.1) с последующим опусканием штрихов, относительно переменных  $\alpha_1 = x_1, \dot{\alpha}_1 = x_2, \alpha_2 = x_3, \dot{\alpha}_2 = x_4$  принимают вид

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv \quad (1.4)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_4)^T$ ,  $u = (u_1, u_2)^T$ ,  $v = (v_1, v_2)^T$ , а  $A$  и  $B$  ( $B = -C$ ) — соответственно  $(4 \times 4)$  и  $(4 \times 2)$ -мерные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В обозначениях (1.3)  $T$  — принятое за единицу измерения характерное время ориентации схвата. Углы поворота  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда для безразмерных переменных и параметров системы (1.4) выполняются следующие соотношения порядков:  $x \sim 1$ ,  $u \sim 1$ ,  $v \sim 1$  [6].

**2. Игровые задачи управления.** Рассмотрим две позиционные игровые задачи управления схватом.

**Задача 1.** Движущая сторона (первый игрок), оперирующая управлением  $u = (u_1, u_2)$ , стремится привести (ориентировать) схват из начального состояния  $(t_0, x(t_0))$  в заданное конечное состояние  $(T, x(T))$  и минимизировать при этом функционал  $J(u, v)$  на движениях системы (1.4), а удерживающая сторона (второй игрок), оперирующая управлением  $v = (v_1, v_2)$  стремится уклонить схват от цели  $(T, x(T))$  и максимизировать значение функционала  $J(u, v)$ . Игроки выбирают свои стратегии из класса позиционных.

Для удобства дальнейших исследований примем за конечное состояние начало координат фазового пространства и  $t_0 = 0$ . Пусть функционал  $J(u, v)$  задан в виде:

$$J[u, v] = \int_0^T (\|x\|^2 + \|u\|_R^2 - \gamma^2 \|v\|_H^2) dt \quad (2.1)$$

где  $\|x\|$  есть евклидова норма вектора  $x \in R^n$ ,  $\|u\|_R^2 = u^T R u$ ,  $\|v\|_H^2 = v^T H v$ , а  $(2 \times 2)$ -матрицы  $R, H$  определены положительно.

В соответствии с поставленной задачей требуется определить оптимальные стратегии  $u^0(x)$  и  $v^0(x)$ , которые доставляют минимакс и максимин функционалу (2.1) соответственно.

В общем случае, когда  $x \in R^n, u, v \in R^m$ , а  $A$  и  $B$  ( $B = -C$ ) соответственно  $(n \times n)$  и  $(n \times m)$ -мерные матрицы, решение поставленной задачи имеет вид [7, 8]

$$u^0(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial W_\gamma}{\partial x}, \quad v^0(x) = \frac{1}{2\gamma^2} H^{-1} C^T \frac{\partial W_\gamma}{\partial x} \quad (2.2)$$

где  $W_\gamma(x)$  есть определено-положительное решение уравнения Беллмана-Айзекса

$$\frac{\partial W_\gamma}{\partial x} A x + \frac{1}{4} \frac{\partial W_\gamma}{\partial x} \left( \frac{1}{2\gamma^2} C H^{-1} C^T - B R^{-1} B^T \right) \frac{\partial W_\gamma}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

с граничным условием  $W_\gamma(0) = 0$ . Решение уравнения (2.3) представляется в виде  $W_\gamma(x) = x^T G x$ , где симметричная матрица  $G$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$A^T G + G A + G \left( \frac{1}{2\gamma^2} C H^{-1} C^T - B R^{-1} B^T \right) G = 0 \quad (2.4)$$

Матричное уравнение (2.4) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений со многими неизвестными, решение которой в общем случае можно получить с применением вычислительной техники.

В рассматриваемом случае (1.4), (2.1), уравнение Беллмана-Айзекса

$$W_\gamma(x) = \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} x_1^2} + \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} x_1 x_2 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} x_2^2} + \quad (2.5)$$

$$+ \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} x_3^2} + \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} x_3 x_4 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} x_4^2}$$

имеет решение  $\gamma > 1$ , где для упрощения вычислений матрицы  $R, H$  выбраны единичными.

Подставляя (2.5) в (2.2), получим следующие выражения для оптимальной стратегии:

$$\begin{aligned}
 u_1^0(x_1, x_2) &= -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} x_1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} x_2} \\
 v_1^0(x_1, x_2) &= -\frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2-1}} x_1 - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2+1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} x_2} \\
 u_2^0(x_3, x_4) &= -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} x_3 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} x_4} \\
 v_2^0(x_3, x_4) &= -\frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2-1}} x_3 - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2+1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} x_4}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.4), получим асимптотические устойчивые оптимальные фазовые траектории управления схватом манипулятора.

Вторую игровую задачу управления схватом сформулируем следующим образом.

**Задача 2.** Пусть ограничения на управления  $u$  и  $v$  для системы (1.4) заданы в виде

$$u \in P, \quad v \in Q \tag{2.7}$$

где  $P$  и  $Q$  — компакты в  $R^2$ . Задачей первого игрока является приведение в момент времени  $T$  манипулятор из заданного начального состояния  $(t_0, x(t_0))$  к началу координат фазового пространства с помощью позиционного управления  $u$ , удовлетворяющего первому ограничению (2.7). Целью второго игрока является противостояние этому движению с помощью позиционного управления  $v$ , удовлетворяющего второму ограничению (2.7).

В соответствии с поставленной задачей определим целевое множество  $M_c$  следующим образом:

$$M_c = \{(t, x) : t \geq t_0 = 0, x = 0\} \tag{2.8}$$

Теперь задачей первого игрока является сближение позиции  $(t, x)$  к целевому множеству  $M_c$  в момент  $t = T$ , в задаче второго игрока — уклонение от  $M_c$  вплоть до момента  $t = T$ .

Исследование поставленной задачи для линейных систем проводится методом экстремального прицеливания [3], который позволяет с помощью некоторых вспомогательных программных конструкций в регулярных случаях построить оптимальные стратегии для исходной позиционной дифференциальной игры. Вычисленная для каждой текущей позиции  $(t, x)$  системы (1.4) на вспомогательных движениях некоторая функция  $\epsilon^0(t, x, T)$  заменяет функцию Беллмана (задача 1).

Согласно методу экстремального прицеливания, необходимо для каждой текущей позиции  $(t, x)$  вычислить функцию

$$\epsilon^0(t, x, T) = \max_{l \in L} \chi(t, x, T, l) + c \tag{2.9}$$

где  $\|l\|$  — евклидова норма вектора прицеливания  $l$ ,  $c$  — некоторая

положительная постоянная, а функция  $\chi(t, x, T, l)$  имеет вид

$$\chi(t, x, T, l) = \rho_1(t, T, l) + \rho_2(t, T, l) + \rho_M(l) + l^T X[T, t]x \quad (2.10)$$

$$\rho_1(t, T, l) = \int_t^T \min_{u \in P} (l^T X[T, \tau] B u) d\tau, \quad \rho_2(t, T, l) = \int_t^T \max_{v \in Q} (l^T X[T, \tau] C v) d\tau$$

$$\rho_M(l) = \min_{-q \in M} l^T q = 0$$

Здесь  $X[T, t]$  — фундаментальная матрица системы (1.4).

Как известно [3], если множества  $P$  и  $Q$  подобны ( $P = rQ, r > 1$ ), то  $\rho_1(t, T, l) = -r\rho_2(t, T, l)$  и ситуация в данной задаче является регулярной. Это означает, что задача на максимум (2.9) имеет единственное решение  $l^0(t, x, T)$ .

Игровую задачу 2 (сближения-уклонения) для схвата манипулятора рассмотрим при следующих ограничениях на управляющие функции:

$$u_1 \in P_1 = \{u_1 | \leq \lambda_1\}, \quad u_2 \in P_2 = \{u_2 | \leq \lambda_2\}, \quad \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = r > 1 \quad (2.11)$$

$$v_1 \in Q_1 = \{v_1 | \leq \mu_1\}, \quad v_2 \in Q_2 = \{v_2 | \leq \mu_2\}$$

$$u = (u_1, u_2) \in P = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq \lambda^2\} \quad (2.12)$$

$$v = (v_1, v_2) \in Q = \{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 \leq \mu^2\}$$

Задача управления схватом (1.4), (2.7), (2.8) при ограничении типа (2.11) распадается на две группы задач, для уравнения второго порядка

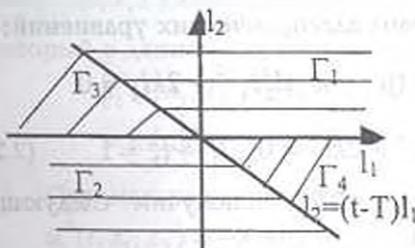
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 - v_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

с ограничениями на управления

$$u_1 \in P_1 = \{u_1 | \leq \lambda_1\} \quad (2.14)$$

и с целевым множеством

$$M_{1c} = \{(t, x_1, x_2) : t \geq 0, x_1 = x_2 = 0\} \quad (2.15)$$



Фиг. 2

Замечание 1. Необходимо отметить, что к уравнениям типа (2.13) приводит также уравнение движения многозвенного манипулятора, управление которого по каждой степени подвижности происходит независимо от остальных [6, 9].

Применяя метод экстремального прицеливания для задачи (2.13)-(2.15), получим

$$\rho_1(t, T, l) = \int_t^T \min_{|u_1| \leq \lambda_1} \{u_1 [l_1(T - \tau) + l_2]\} d\tau = -\lambda_1 \int_t^T |u_1 [l_1(T - \tau) + l_2]| d\tau \quad (2.16)$$

Интеграл (2.16) в разных областях плоскости  $(l_1, l_2)$  (фиг.2) имеет

различные значения

$$\rho_1(t, T, l) = \begin{cases} -\frac{\lambda_1}{2} [l_1(T-t)^2 + 2l_2(T-t)], & \Gamma_1 = \{l_1 \geq 0, l_2 \geq 0\} \cup \{l_1 < 0, l_2 \geq (t-T)l_1\} \\ \frac{\lambda_1}{2} [l_1(T-t)^2 + 2l_2(T-t)], & \Gamma_2 = \{l_1 < 0, l_2 < 0\} \cup \{l_1 > 0, l_2 \leq (t-T)l_1\} \\ -\frac{\lambda_1}{2} \left[ l_1(T-t)^2 + 2l_2(T-t) + 2\frac{l_1^2}{l_1} \right], & \Gamma_3 = \{l_1 > 0, (t-T)l_1 < l_2 < 0\} \\ \frac{\lambda_1}{2} \left[ l_1(T-t)^2 + 2l_2(T-t) + 2\frac{l_2^2}{l_2} \right], & \Gamma_4 = \{l_1 > 0, (t-T)l_1 < l_2 < 0\} \end{cases} \quad (2.17)$$

Экстремальная задача (2.9) в этом случае приводится к виду

$$\varepsilon^0(t, x_1, x_2, T) = \max_{|l|=1} \{l_1[x_1 + (T-t)x_2] + l_2x_2 + (1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1})\rho_1(t, T, l)\} + c \quad (2.18)$$

где  $\rho_1(t, T, l)$  имеет вид (2.17), а  $\|l\| = (l_1^2 + l_2^2)^{1/2}$ .

Экстремальная задача (2.18) в плоскости  $(l_1, l_2)$  исследуется методом Лагранжа.

1) при  $(l_1, l_2) \in \Gamma_1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) &= \left\{ [x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\mu_1 - \lambda_1)(T-t)^2] + [x_2 + (\mu_1 - \lambda_1)(T-t)]^2 \right\}^{1/2} + c \\ l_1^0(t, x_1, x_2, T) &= [x_1 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\mu_1 - \lambda_1)(T-t)^2][\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \\ l_2^0(t, x_1, x_2, T) &= [x_2 + (\mu_1 - \lambda_1)(T-t)][\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

2) при  $(l_1, l_2) \in \Gamma_2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^0(t, x, T) &= \left\{ [x_1 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2] + [x_2 + (\lambda_1 - \mu_1)(T-t)]^2 \right\}^{1/2} + c \\ l_1^0(t, x_1, x_2, T) &= [x_1 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2][\varepsilon_2^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \\ l_2^0(t, x_1, x_2, T) &= [x_2 + (\lambda_1 - \mu_1)(T-t)][\varepsilon_2^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

3) При  $(l_1, l_2) \in \Gamma_3$  исследование экстремальной задачи (2.18) приводится к решению следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 - (\mu_1 - \lambda_1)l_2^2l_1^{-2} + 2kl_1 &= 0 \\ x_2 + (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) + 2(\mu_1 - \lambda_1)l_2l_1^{-1} + 2kl_2 &= 0 \quad l_1^2 + l_2^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

относительно неизвестных  $l_1, l_2, k$ . Из (2.21) получим следующее решение для экстремальной задачи (2.18):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^0(t, x_1, x_2, T) &= \left\{ [x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_1 - \mu_1)\varphi^2]^2 + [x_2 - (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) - 2(\lambda_1 - \mu_1)\varphi]^2 \right\}^{1/2} + c \end{aligned}$$

$$l_1^0(t, x_1, x_2, T) = [x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 + (\lambda_1 - \mu_1)\varphi^2][\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \quad (2.22)$$

$$l_2^0(t, x_1, x_2, T) = [x_2 - (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) - 2(\lambda_1 - \mu_1)\varphi][\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1}$$

где  $\varphi$  есть действительный корень кубического уравнения

$$\varphi^3 + \left\{ 2 + \left[ x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 \right] (\lambda_1 - \mu_1)^{-1} \right\} \varphi - [x_2 - (\lambda_1 - \mu_1)(T-t)] (\lambda_1 - \mu_1)^{-1} = 0 \quad (2.23)$$

который единственен при условии

$$4 \left\{ 2 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 \right\}^3 + 27 \left\{ x_2 + (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) \right\} (\lambda_1 - \mu_1)^{-1} > 0 \quad (2.24)$$

и имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{6} \left( -108\eta + 12(129^3 + 81\eta^2)^{1/2} \right)^{1/3} - 29 \left( -108\eta + 12(129^3 + 81\eta^2)^{1/2} \right)^{-1/3}$$

где

$$\eta = 2 + \left[ x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 \right] (\lambda_1 - \mu_1)^{-1}$$

$$\eta = -[x_2 - (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) - x_2] (\lambda_1 - \mu_1)^{-1}$$

Если условия (2.24) не выполняются, то (2.23) имеет три действительных корня.

4) При  $(l_1, l_2) \in \Gamma_4$  для  $\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T)$ ,  $l_1^0(t, x_1, x_2, T)$  и  $l_2^0(t, x_1, x_2, T)$  получаем выражения, аналогичные (2.22)-(2.24), где вместо величины  $-(\lambda_1 - \mu_1)$  следует поставить  $(\lambda_1 - \mu_1)$ .

Следовательно, после исследования экстремальной задачи (2.18), для тех позиций  $(t, x_1, x_2)$ , где  $\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) > c$ , можно определить оптимальную стратегию первого игрока из задачи на минимум [3]

$$l^{0*}(t, x, T) X[T, t] Bu^0(t, x) = \min_{u \in P} l^{0*}(t, x, T) X[T, t] Bu \quad (2.25)$$

который в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} & [l_1^0(t, x_1, x_2, T)(T-t) - l_2^0(t, x_1, x_2, T)] u_1^0(t, x_1, x_2) = \\ & = \min_{u_1 \in U_1} [l_1^0(t, x_1, x_2, T)(T-t) - l_2^0(t, x_1, x_2, T)] u_1(t, x_1, x_2) \end{aligned}$$

Оптимальная стратегия первого игрока (2.25) имеет вид

$$u_1^0(t, x_1, x_2) = -\lambda_1 \text{sign}((l_1^0(t, x_1, x_2, T)(T-t) - l_2^0(t, x_1, x_2, T))) \quad (2.26)$$

Для остальных позиций оптимальная стратегия  $u_1^0(t, x_1, x_2)$  есть любой вектор, удовлетворяющий ограничению (2.14).

Для определения оптимальной стратегии  $v_0(t, x)$  второго игрока, в общем случае (1.4), (2.7)-(2.9), необходимо вычислить вектор прицеливания  $z(t, x)$ , согласно равенству [3]

$$s(t, x, T) = \int_t^T [\varepsilon^0(t, x, \tau) - c]^{-2} X^T[\tau, t] l^0(t, x) d\tau \quad (T < T_0(t_0, x_0)) \quad (2.27)$$

где  $\varepsilon^0(t, x, \tau)$  — сеть значений максимума (2.9) при  $T = \tau$ .

Заметим, что как здесь, так и выше,  $T_0(t_0, x_0)$  есть наименьший корень уравнения

$$\varepsilon^0(t_0, x_0, T) = 0$$

Стратегия  $V_0(t, x)$  определяется из следующей задачи на максимум [3]

$$s^T(t, x) C v^0(t, x) = \max_{v \in Q} s^T(t, x) C v \quad (2.28)$$

для всех позиций  $(t, x) \in G$ , где

$$G = \{(t, x) : \varepsilon^0(t, x, T) > c, 0 \leq t < T\} \quad (2.29)$$

В рассматриваемом случае (2.13)-(2.18), оптимальная стратегия второго игрока для всех позиции  $(t, x) \in G_1$ , которые имеют вид

$$G_1 = \{(t, x_1, x_2) : \varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) > c, 0 \leq t < T\} \quad (2.30)$$

определяется из следующей задачи на максимум (2.28)

$$-s^T(t, x_1, x_2, T) v_1^0(t, x_1, x_2) = \max_{v_1 \in Q_1} (-s^T(t, x_1, x_2, T) v_1(t, x_1, x_2)) \quad (2.31)$$

Решение задачи (2.31) определяется формулой

$$v_1^0(t, x_1, x_2) = -\mu_1 \text{signs}(t, x_1, x_2, T), \quad \text{где}$$

$$s(t, x_1, x_2, T) = \int_t^T [\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, \tau) - c]^{-2} l_1^0(t, x_1, x_2, \tau) d\tau$$

При  $(t, x_1, x_2) \in G_1$   $v_1(t, x_1, x_2)$  есть любой вектор, удовлетворяющий условию  $|v_1| \leq \lambda_1$ .

Замечание 2. Если условие (2.24) не выполняется, то вектор прицеливания  $\{l_1^0(t, x_1, x_2, T), l_2^0(t, x_1, x_2, T)\}$  не единственен и они образуют множество  $L^0(t, x, T)$ .

Если для всякой позиции  $(t, x) \in G_1$  и при всяком выборе вектора  $v \in Q_1 = \text{co}\{v \in Q_1\}$  найдется по крайней мере один максимизирующий момент  $\tau_0$

$$\varepsilon^0(t, x) = \min_{\tau \in [t, T]} \varepsilon_1^0(t, x, \tau)$$

и один вектор  $u \in P = \text{co}\{u \in P\}$  такой, что для любого вектора  $l^u$  из множества  $L^u(t, x, \tau_0)$  и для всех  $t > \tau_0$  выполняется неравенство

$$l^{uT} (Bu + Cv) \leq \min_{u \in P} l^{uT} Bu + \max_{v \in Q} l^{uT} Cv \quad (2.32)$$

то экстремальная к множеству  $W[T] = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, \varepsilon^0(t, x) = c\}$  стратегия  $u^0(t, x)$  гарантирует для всякого движения  $x[t] = x[t, t_0, x_0, u^0]$  системы (1.4) встречу с множеством (2.8) к моменту  $t = T$ , если только

$\varepsilon^0(t_0, x_0) = c$  [3]. Легко проверить, что неравенство (2.32) в данном случае выполняется.

Перейдем к исследованию игровой задачи 2 (сближения-уклонения) управления движением (ориентацией) схвата манипулятора (фиг. 1), уравнения которого имеют вид (1.4), при ограничениях на управления (2.12) и целевом множестве

$$M_c = \{(t, x) : x = (x_1, x_2, x_3, x_4), t \geq 0, x = 0\} \quad (2.33)$$

$\rho_1(t, T, l)$ , согласно (2.10) в рассматриваемом случае определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \rho_1(t, T, l) = \int_{x^*}^x \min (l^T X[T, \tau] Bu) d\tau = -\frac{\lambda}{2} (T-t + ba^{-1}) \times \\ \times [a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d]^{1/2} - ba^{-1}d^{1/2} + a^{-1/2}(d - b^2a^{-1}) \times \\ \times (\ln[a^{1/2}(T-t) + ba^{-1} + (a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d)^{1/2}] - \ln(ba^{-1/2} - d^{1/2})), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где приняты следующие обозначения:

$$a = l_1^2 + l_2^2, \quad b = l_1l_2 + l_3l_4, \quad d = l_3^2 + l_4^2, \quad l = (l_1, l_2, l_3, l_4)$$

Заметим, что если необходимо совместить только геометрические координаты схвата манипулятора, то  $l_2 = l_4 = 0$  и  $\varepsilon^0(t, x, T)$  (2.9) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t, x, T) = \max_{l_1, l_3} \{l_1[x_1 + (T-t)x_2] + l_3[x_3 + (T-t)x_4] + \\ + \frac{1}{2}[(\mu - \lambda)(T-t)^2](l_1^2 + l_3^2)^{1/2}\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

где  $\|l\| = (l_1^2 + l_3^2)^{1/2}$ .

В (2.35) максимум достигается при

$$\begin{aligned} l_1^0(t, x, T) = [x_1 + (T-t)x_2] \left\{ [x_1 + (T-t)x_2]^2 + [x_3 + (T-t)x_4]^2 \right\}^{1/2} \\ l_3^0(t, x, T) = [x_3 + (T-t)x_4] \left\{ [x_1 + (T-t)x_2]^2 + [x_3 + (T-t)x_4]^2 \right\}^{1/2} \\ l_2^0(t, x, T) \equiv 0, \quad l_4^0(t, x, T) \equiv 0 \end{aligned}$$

и имеет следующий вид:

$$\varepsilon^0(t, x, T) = \left\{ [x_1 + (T-t)x_2]^2 + [x_3 + (T-t)x_4]^2 \right\}^{1/2} - \frac{1}{2}(T-t)^2(\lambda - \mu) \quad (2.36)$$

Согласно (2.25), оптимальная стратегия первого игрока в тех позициях, где  $\varepsilon_0(t, x, T) > c$ , здесь определяется выражениями

$$\begin{aligned} u_1^0(t, x) = -\lambda [l_1^0(t, x, T)(l_1^{02}(t, x, T) + l_3^{02}(t, x, T))]^{-1/2} \\ u_3^0(t, x) = -\lambda [l_3^0(t, x, T)(l_1^{02}(t, x, T) + l_3^{02}(t, x, T))]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

а оптимальная стратегия второго игрока в позициях, где  $\varepsilon_0(t, x, T) > c$ , согласно (2.28) имеет вид

$$v_1^0(t, x) = \mu s_1^0(t, x, T), \quad v_3^0(t, x) = \mu s_3^0(t, x, T), \quad \text{где}$$

$$s_1^0(t, x, T) = \int_t^T [\varepsilon_0(t, x, \tau) - c]^{-2} (\tau - t) l_1^0(t, x, \tau) dt \quad T < T_0(t_0, x_0) \quad (2.38)$$

$$s_2^0(t, x, T) = \int_t^T [\varepsilon_0(t, x, \tau) - c]^{-2} (\tau - t) l_2^0(t, x, \tau) dt$$

Таким образом, вектор прицеливания и оптимальные стратегии движения (ориентации) схвата манипулятора при ограничениях на управляющие функции (2.11), (2.12), определяются в явном виде.

Заключение. Строится математическая модель схвата манипулятора, который должен осуществить оптимальное (в смысле дополнительных критерий) и контролируемые движения. Управления по каждой степени подвижности схвата реализуются двумя управляющими воздействиями. С применением методов динамического программирования и экстремального прицеливания исследованы две позиционные игровые задачи управления при разных ограничениях на управляющие воздействия. Получены оптимальные стратегии управления движением (ориентации) схвата манипулятора в явном виде, которые можно реализовать в системе управления с обратной связью. Аналогичные исследования можно проводить также для многосвязного манипулятора с несколькими степенями подвижности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Черноусько Ф.А., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
5. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы (справочник). М.: Машиностроение, 1983.
6. Акуленко А.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов // Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1986.
7. Bittanti S., Laub A., Williams J. C. The Riccati equation. New York, Springer, 1991.
8. Anderson B. D. O., Moore J. B. Linear optimal control. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ, 1971.
9. Черноусько Ф.А., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию  
30.05.2000