ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №4, 2000 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ С ЧАСТИЧНО НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Капанадзе Г.А.

Գ.Ա. Կապանաձե
Մասնակի անհայտ եզրով սալի ծռման մի խնդրի մասին
Դիտարկվում է իզոտրոպ առաձգական սալի ծռման խնդիրը երկկապ վերջավոր տիրույթի համար, որի արտաքին եզրը ուռուցիկ բազմանկյուն է, իսկ ներքինը՝ փակ ողորկ կոնտուր: Ենթադրվում է, որ արտաքին եզրագծի յուրաքանչյուր օղակին ամրացված է կոշտ ձող և սալը ծռվում է ձողերի վրա կիրառված նորմալ-ծռող մոմենտներով, իսկ եզրագծի ներքին մասը ազատ է արտաքին լարումներից: Պահանջվում է որոշել սալի ճկվածքը և ներքին եզրագծի ձևը այն պայմանից, որ նրա վրա տանգենցիալ-նորմալ մոմենտը ընդունում է հաստատուն արժեք: Քննարկվող խնդիրը բերելով Ռիման-Հիլբերտի խնդրին և լուծելով այն, կառուցվում է խնդրի էֆեկտիվ լուծումը:

G.A. Khapanadze
One Problem of a Bend of a Plate with partially unknown border

Рассматривается задача изгиба изотропной упругой пластинки для конечной двухсвязной области, внешней границей которой является выпуклый многоугольник, а внутренней границей – гладкий замкнутый контур. Предполагается, что на каждом звене внешней границы прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормально-изгибающими моментами, приложенными к планкам, а внутренняя часть границы свободна от внешних усилий. Задача заключается в определении прогиба пластинки и формы внутренней границы при условии, что на ней тангенциально-нормальный момент принимает постоянное значение. Путем сведения рассмотренной задачи к задаче Римана-Гильберта для кругового кольца и решением последнего, решение рассмотренной задачи строится эффективно.

Краевые задачи изгиба пластинки с частично неизвестной границей исследованы в работах [1,2].

Пусть срединная поверхность изотропной упругой пластинки занимает конечную двухсвязную область S, внутренней границей которой является гладкая замкнутая кривая L_1, а внешней границей – выпуклый многоугольник (A_0) с границей L_0. Обозначим через A_j $(j=1,\dots,n)$ вершины (их аффиксы) многоугольника (A_0). Возьмем точку $z=0$ внутри контура L_1 и положительное направление на $L=L_0\cup L_1$, оставляющее область S слева.

Предположим, что на каждом звене границы L_0 прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормальными моментами, приложенными к планкам, а L_1 свободна от внешних усилий. Будем считать, что на каждом звене границы L_0 задан либо угол поворота, либо значение главного изгибающего момента.

Рассмотрим задачу: найти прогиб $u(x,y)$ средней поверхности пластинки и неизвестную часть L_1 границы L при условии, что на L_1

тангенциальный нормальный момент принимает постоянное значение.

Согласно приближенной теории изгиба пластинки [3] прогиб $u(x,y)$ средней поверхности в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 u(x,y)=0, \quad z=x+iy\in S \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} &M_n=f(t) \left(\text{или } \frac{\partial u}{\partial n}=d(t)\right), \quad N(t)=0, \quad t\in L_0 \\ &M_n=0, \ M_{ns}=0, \ M_s=n=\text{const}, \ N(t)=0, \quad t\in L_1 \end{aligned} \tag{2}$$

где $d(t)=d_k=\operatorname{tg}\gamma_k$ (γ_k – углы поворота), при $t\in L_0^{(k)}$ ($L_0^{(k)}$ – стороны многоугольника (A_0)), $N(t)$ – перерезывающая сила, M_n – нормально-изгибающий момент, M_{ns} – крутящий момент, M_s – тангенциально-нормальный момент.

На основании известных формул имеем [3]

$$\frac{\partial u}{\partial n}+i\frac{\partial u}{\partial s}=e^{-i\alpha(t)}\left[\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\right]$$

$$(\sigma-1)kd\left[\chi\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}\right]=\left[M_n+i\int_0^s N(t)ds\right]dt \tag{3}$$

$$M_n+M_s=-4D(1-\sigma)\operatorname{Re}[\varphi'(t)]$$

где $\alpha(t)$ – угол между осью Ox и внешней нормалью границы L_0 в точке $t\in L_0$, $D=Eh^3\left[12(1-\sigma^2)\right]^{-1}$ – цилиндрическая жесткость пластинки.

В силу условий (2) и формулы (3), относительно искомых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ получаем задачу

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(t)}\left(\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\right)\right]=d(t), \quad t\in L_0 \tag{4}$$

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(t)}\left(\chi\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}\right)\right]=c(t)+g(t), \quad t\in L_0 \tag{5}$$

$$\chi\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=E(t), \quad t\in L_1 \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}[\varphi'(t)]=P, \quad t\in L_1 \tag{7}$$

где $d(t)=\operatorname{tg}\gamma_n$, $c(t)=c_k\sum_{j=1}^{k}M_j\sin(\alpha_k-\alpha_j)$, $M_j=\frac{1}{1-\sigma}\int_{L_0^{(j)}}M_n ds$, $\chi=\frac{\sigma+3}{1-\sigma}$

$g(t)=g_k$ – действительные постоянные, $E(t)=E$ – произвольная (вообще, комплексная) постоянная, $P=-k/\left[4D(1-\sigma)\right]$ – действительная постоянная.

От искомых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ требуем, чтобы $\varphi(z)$ была непрерывна в замкнутой области $S+L$, а $\psi'(z)$ и $\psi(z)$ непрерывно продолжимы на границу области S всюду, за исключением, может быть, вершин многоугольника (A_0), в окрестностях которых выполняются условия

условия

$$|\varphi'(z)|,\ |\psi(z)| < M|z - A_k|^{-\delta_k},\ 0 \le \delta_k < 1$$

Сложением (4) и (5) и затем дифференцированием по дуговой абсциссе s получаем

$$\operatorname{Im}[\varphi'(t)] = 0 \tag{8}$$

Пусть $z = \omega(\zeta)$ – конформное отображение области S на круговое кольцо D $(1 < |\zeta| < R)$, где R – неизвестное число, которое следует определить. Будем считать, что L_0 переходит в окружность l_0, $(|\zeta| = R)$, а L_1 – в окружность l_1, $(|\zeta| = 1)$. Обозначим через a_k точки окружности l_0, соответствующие точкам A_k (можно полагать $a_1 = R$).

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta) = \varphi'[\omega(\zeta)] - p \tag{9}$$

По условиям (7) и (8) заключаем, что функция $\Phi(\zeta)$ является решением задачи Римана-Гильберта для кругового кольца D:

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = 0,\ t \in l_1,\quad \operatorname{Im}\Phi(t) = 0,\ t \in l_0$$

Отсюда заключаем, что $\Phi(\zeta) \equiv 0$ и, следовательно, из формулы (9) получаем

$$\varphi(z) = p \cdot z,\ \ z \in S \tag{10}$$

Следовательно, на основании условия (4)-(6), для функций $\psi_0(\zeta) \equiv \psi[\omega(\zeta)]$ и $\omega(\zeta)$, голоморфных в кольце D, получаем граничную задачу

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(\sigma)}\left(p(x-1)\omega(\sigma) - \overline{\psi_0(\sigma)}\right)\right] = c(\sigma) + g(\sigma), & \sigma \in l_0 \\ p(x-1)\omega(\sigma) - \overline{\psi_0(\sigma)} = E(\sigma), & \sigma \in l_1 \end{cases} \tag{11}$$

Для упрощения записи кусочно-постоянные функции $\alpha[\omega(\sigma)], \ldots, g[\omega(\sigma)]$ обозначим опять через $\alpha(\sigma), \ldots, g(\sigma)$. Так будем поступать и в дальнейшем относительно кусочно-постоянных функций и определим их на всей плоскости равенствами $f(r\sigma) = f(\sigma)$ $(0 < r < \infty)$.

Легко заметить, что на l_0 имеет место равенство

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(\sigma)}\omega(\sigma)\right] = f_0(\sigma),\ \ \sigma \in l_0 \tag{12}$$

где $f_0(\sigma) = \operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(\sigma)}A(\sigma)\right]$, $A(\sigma) = A_k$, $\sigma \in l_0^{(k)}$, ($l_0^{(k)}$ – дуги окружности l_0, соответствующие сторонам $L_0^{(k)}$).

Из условий (11) и (12) относительно функций $\omega(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ получим граничную задачу

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(\tau)}\omega(\tau)\right] = f_0(\tau),\ \ \tau \in l_0 \tag{13}$$

$$\omega(\sigma)-\frac{1}{p(x-1)}\overline{\psi_0(\sigma)}=\frac{E(\sigma)}{p(x-1)},\ \ \sigma\in l_1 \qquad (14)$$

где $f_1(\tau)=f_0(\tau)-\dfrac{1}{p(x-1)}[c(\tau)+g(\tau)]$

Рассмотрим новую искомую функцию $W(\zeta)$, определяемую формулой

$$W(\zeta)=\begin{cases}\omega(\zeta), & 1<|\zeta|<R,\\ \dfrac{1}{p(x-1)}\left[\overline{\psi_0\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}+E\right], & \dfrac{1}{R}<|\zeta|<1\end{cases} \qquad (15)$$

В силу условий (14) заключаем, что $W(\zeta)$ является голоморфной функцией в кольце $D^*\ (1/R<|\zeta|<R)$, и удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(\tau)}W(\tau)\right]=f_0(\tau),\ \ \tau\in l_0\\ &\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(t)}W(t)\right]=f^*{}_1(t),\ \ t\in l_0^*\end{aligned} \qquad (16)$$

где l_0^* – окружность $|\zeta|=\dfrac{1}{R}$, $f_1^*(t)=f_1(t)+\dfrac{1}{p(x-1)}\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}E\right]$.

Теперь рассмотрим многоугольник (A_1), целиком расположенный внутри контура L_1, и подобный многоугольник (A_0) так, чтобы соответственные вершины были расположены на одном и том же луче, проведенном из точки $z=0$ (коэффициент подобия ρ пока не фиксируем). Вершины многоугольника (A_1) обозначим через $A_i^*\left(A_i^*=\dfrac{1}{\rho}A_i\right)$, а границу – через L_0^*.

Обозначим через S^* двухсвязную область, ограниченную многоугольниками (A_0) и (A_1). Положительным направлением на границе области $S^*\ (L^*=L_0\cup L_0^*)$ выберем то, которое область S^* оставляет слева.

Пусть функция $z=\omega^*(\zeta)$ конформно отображает область S^* на круговое кольцо $D^*\ (1/R<|\zeta|<R)$. При этом L_0 переходит в окружность l_0, а L_0^* – в окружность l_0^*. Функция $\omega^*(\zeta)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(\tau)}\omega^*(\tau)\right]=f_0(\tau)\\ &\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(\tau/R^2)}\omega^*(\tau/R^2)\right]=\frac{1}{\rho}f_0(\tau/R^2),\ \ \tau\in l_0\end{aligned} \qquad (17)$$

Дифференцируя граничные условия (17) по s, получим

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left[i\tau \cdot e^{-i\alpha(\tau)}\omega^{*'}(\tau)\right]=0,\quad \tau\in l_0\\
&\operatorname{Re}\left[ite^{-i\alpha(t)}\omega^{*'}(t)\right]=0,\quad t\in l_0^{*}
\end{aligned}\tag{18}$$

Решение задачи (18) (относительно функции $\omega^{*'}(\zeta)$) класса $h\left(\dfrac{a_1}{R^2},\ldots,\dfrac{a_n}{R^2}\right)$ [3] имеет вид

$$\omega^{*'}(\zeta)=K\cdot e^{ic_0}\prod_{j=-\infty}^{\infty}G\left(R^{4j}\zeta\right)g\left(R^{4j}\zeta\right)\cdot R^{4\delta_j}\zeta^{-2}\cdot R^2 \tag{19}$$

где $G(\zeta)=\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta-a_k)^{\alpha_k^0-1}$, $g(\zeta)=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\zeta-\dfrac{a_k}{R^2}\right)^{1-\alpha_k^0}$, $\delta_j=\begin{cases}0 & j\ge 0\\ 1 & j\le -1\end{cases}$

$\alpha_k^0\pi$ — величина внутреннего угла при вершине A_k.

$c_0=\dfrac{1}{4\pi i}\int\limits_{l_0}\ln\left[e^{-i\alpha(\tau)}\cdot R^2\cdot\tau^{-2}\right]\dfrac{d\tau}{\tau}$, k — действительная постоянная

Формуле (19) можно придать вид

$$\omega^{*'}(\zeta)=K\cdot e^{ic_0}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{a_k}{R}\right)^{\alpha_k^0-1}\left(1-\frac{\zeta}{a_k}\right)^{\alpha_k^0-1}\left(1-\frac{a_k}{R^2\zeta}\right)^{1-\alpha_k^0}\zeta^{-2}\frac{T(\zeta)}{T\left(R^2\zeta\right)} \tag{20}$$

где

$$T(\zeta)=\prod_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{R^{4j}\zeta}\right)^{\alpha_k^0-1}\left(1-\frac{\zeta}{a_kR^{4j}}\right)^{\alpha_k^0-1}$$

Таким образом, функция $\omega^{*}(\zeta)$ имеет вид

$$\omega^{*}(\zeta)=K\cdot e^{ic_0}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{R}\right)^{\alpha_k^0-1}\left(1-\frac{\zeta}{a_k}\right)^{\alpha_k^0-1}\left(1-\frac{a_k}{R^2\zeta}\right)^{1-\alpha_k^0}\zeta^{-2}\frac{T(\zeta)}{T\left(R^2\zeta\right)}d\zeta+\omega(\zeta_0) \tag{21}$$

где ξ_0 — фиксированная точка области D^{*}.

Из приведенных результатов заключаем, что функция $e^{2i\alpha(t)}$ представлена в виде $e^{2i\alpha(t)}=\dfrac{\chi(\tau)}{\overline{\chi(\tau)}}=\dfrac{\chi\left(\tau/R^2\right)}{\overline{\chi\left(\tau/R^2\right)}}$, где $\chi(\zeta)=\omega^{*'}(\zeta)\cdot\zeta$ и, таким образом, граничные условия (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\Omega(\tau)+\overline{\Omega(\tau)}=2e^{i\alpha(\tau)}\left[\chi(\tau)\right]^{-1}\cdot f_0(\tau)\\
&\Omega\left(\tau/R^2\right)+\overline{\Omega\left(\tau/R^2\right)}=2e^{i\alpha(\tau)}\rho^{-1}\left[\chi\left(\tau/R^2\right)\right]^{-1}f_0\left(\tau/R^2\right),\ \tau\in l_0
\end{aligned}\tag{22}$$

где $\Omega(\zeta)=\omega^{*'}(\zeta)\cdot\left[\chi(\zeta)\right]^{-1}$.

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (22) имеет вид

$$\int_{l_0}\frac{f_0(\tau)e^{i\alpha(\tau)}}{\omega^{*}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau^2}=\frac{R^2}{\rho}\int_{l_0}\frac{f_0(\tau/R^2)e^{i\alpha(\tau/R^2)}}{\omega^{*}(\tau/R^2)}\frac{d\tau}{\tau^2}$$

Из этого условия находим зависимость между ρ и R

$$\rho=R^2\cdot\frac{\int_{l_0}f_0(\tau/R^2)e^{i\alpha(\tau)}\left[\omega^{*'}(\tau/R^2)\right]^{-1}\tau^{-2}d\tau}{\int_{l_0}f_0(\tau)e^{i\alpha(\tau)}\left[\omega^{*'}(\tau)\right]^{-1}\tau^{-2}d\tau} \tag{23}$$

Вернемся теперь к задаче (16). Легко заметить, что если $W(\zeta)$ – решение задачи (16), то $W'(\zeta)=\omega^{*'}(\zeta)$, где $\omega^{*'}(\zeta)$ определена формулой (20). Для того, чтобы задачи (16) и (17) были одни и те же, потребуем, чтобы имело место равенство

$$\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{Re}\left[e^{-i\alpha(t)}A(t)\right]=\frac{1}{p(x-1)}\left[c(t)+g(t)-\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}E\right)\right] \tag{24}$$

Если постоянные $g_k\ (k=1,\dots,n)$ и $E=E_1+iE_2$ подберем так, чтобы имело место равенство (24), то уравнение контура L_1 определится из соотношения

$$t'=\frac{i\sigma\omega^{*'}(\sigma)}{\left|\omega^{*'}(\sigma)\right|},\quad \sigma\in l_1 \tag{25}$$

а функция $\psi_*(\zeta)$ будет иметь вид

$$\psi_*(\zeta)=p(x-1)\overline{\omega^{*}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}-\overline{E},\ \zeta\in D \tag{26}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда (A_0) – правильный многоугольник. Предположим, что на каждой стороне многоугольника действует один и тот же постоянный нормально-изгибающий момент M.

Начало координатной системы возьмем в центре многоугольника (A_0), а ось Ox направим перпендикулярно к стороне A_1A_2. В этом случае можно допустить

$$A_k=r\exp\left\{-\frac{\pi i}{n}+\frac{2\pi i}{n}(k-1)\right\},\ d_k=\frac{2\pi}{n}(k-1),\ a_k=R\cdot\exp\left\{\frac{2\pi i}{n}(k-1)\right\} \tag{27}$$

В силу этих формул легко показать, что функция $f_0(\tau)$ является постоянной

$$f_0(\tau)=r\cos\frac{\pi}{n}$$

Кусочно-постоянная функция $c(\tau)$ в этом случае имеет вид

$$c(\tau)=\frac{M}{\sigma-1}\sum_{j=1}^{k}\sin\frac{2\pi}{n}j=\frac{M}{2(\sigma-1)\sin\frac{\pi}{n}}\left[\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}(2k-1)\right],\quad \tau\in l_0^{(k)}$$

Таким образом, условие (24) примет вид (считаем $g_k=0$)

$$\left(1-\frac{1}{\rho}\right)r\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{p(x-1)}\left[\frac{M}{2(\sigma-1)}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}-\frac{\cos\frac{\pi}{n}(2k-1)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)-(E_1\cos\alpha_k+E_2\sin\alpha_k)\right]$$

или, то же самое

$$\left(1-\frac{1}{\rho}\right)r\cos\frac{\pi}{n}=\frac{M}{2(\sigma-1)p(x-1)}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}-\frac{M}{2(\sigma-1)p(x-1)}\cos\frac{2\pi}{n}(k-1)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}+$$
$$+\frac{M}{2(\sigma-1)p(x-1)}\sin\frac{2\pi}{n}(k-1)-\frac{E_1}{p(x-1)}\cos\frac{2\pi}{n}(k-1)-\frac{E_2}{p(x-1)}\sin\frac{2\pi}{n}(k-1) \tag{28}$$

Если возьмем

$$E_1=-\frac{M}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},\quad E_2=\frac{M}{2}$$

из (28) получаем

$$\left(1-\frac{1}{\rho}\right)r\cos\frac{\pi}{n}=\frac{M}{2p(x-1)(\sigma-1)}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$

Отсюда, учитывая, что $p=-k[4D(1-\sigma)]^{-1}$, получаем формулу для k:

$$k=\frac{MEh^3}{12(1+\sigma)^2 r\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} \tag{29}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Некоторые обратные задачи теории упругости //Тр.Тбилисского матем. ин-та, 87 (1987), с.3-20.
2. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Об одной полуобратной задаче изгиба пластинки //Сообщ. АН ГССР, 128 (1987), №2, с.277-280.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М. Наука, 1968. 512 с.

Тбилисский государственный университет

Поступила в редакцию 27.09.2000