ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №4, 2000 Механика

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, НА ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕН СТРИНГЕР КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Григорян Э.Х.

Է.Խ.Գրիգորյան

Անվերջ առաձգական սալի, որի վրա սոսնձված է վերջավոր երկարության ստրինգեր, խնդրի լուծման մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է կոնտակտային խնդիր անվերջ առաձգական սալի վերաբերյալ, որի վրա իր ամբողջ երկարությամբ սոսնձված է վերջավոր ստրինգեր: Խնդիրը հանգեցվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որի աջ մասը հանդիսանում է խնդրի լուծումը, երբ սալը բացարձակ կոշտ է: Այնուհետև տրվում է խնդրի պարամետրերի ճշգրիտ գնահատական, որոնց դեպքում ստացված ինտեգրալ հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորության և անվերջ հավասարումների սիստեմի մեթոդներով:

E.Kh.Grigoryan

On solution of problem for an elastic infinite plate, on the surface of which finite length stringer is glued

В работе рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от стрингера конечной длины к упругой бесконечной пластине. Причем стрингер по всей своей длине контакта приклеен к пластине. Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, правая часть которого является решением задачи, соответствующей жесткой пластине. Далее дается точная оценка параметров задачи, при которых полученное интегральное уравнение можно решать с помощью методов последовательных приближений и бесконечных систем уравнений.

Рассматривается задача о передаче нагрузки от стрингера конечной длины к упругой бесконечной пластине. Причем стрингер по всей своей длине приклеен к пластине. Вопрос заключается в определении контактных касательных напряжений, когда сила приложена к концу $x = L$ стрингера.

Обсуждаемая задача ранее рассматривалась в работе [1] (здесь сила приложена к концу $x=0$ стрингера), где задача свелась к решению интегрального уравнения

$$Q(x)-\beta^2\int_0^x (x-u)Q(u)du-\gamma^2\int_0^1 \ln|x-u|Q(u)du-K=-\beta^2 x,\quad 0\le x\le 1 \tag{1}$$

где K определяется из условия $\int_0^1 Q(u)du = 1$.

$$K = u_0 GbL/P\eta+\gamma^2 \ln L, Q(x)=q(x)L/P, \beta^2 = GbL^2/\eta E_1 A$$

$\gamma^2 = GbL(1+\nu)(3-\nu)/4\pi\eta E_2 t$; b, L, A, E_1 –ширина, длина, площадь поперечного сечения и модуль упругости материала стрингера соответственно; η, G–толщина и модуль сдвига материала клея соответственно, t, ν, E_2 –толщина, коэффициент Пуассона и модуль упругости материала пластины соответственно, u_0 –неизвестная постоянная, P –величина силы, приложенной к концу $x = L$ стрингера, $q(x) = b\tau(x)$, $\tau(x)$ –контактные касательные напряжения.

Далее решение уравнения (1) ищется в виде

$$Q(x) = Q_0(x) + Q(0)\left[1 + \gamma^2 (x \ln x - x)\right] + Q(1)\left[1 + \gamma^2 (1-x)\ln(1-x) - (1-x)\right] + R(x)$$

где $Q_0(x) = \beta \mathrm{ch}\beta(L-x)/\mathrm{sh}\beta$ является решением задачи в случае жесткой пластины.

В работе [2], где опять рассматривается эта задача, решение уравнения (1) строится с помощью ортогональных многочленов Чебышева второго рода.

1. **Получение интегрального уравнения задачи.** Относительно стрингера принимается модель контакта по линии, т.е. допускается, что контактные силы сосредоточены по длине средней линии контактного участка, а относительно пластины полагается, что во время деформации она находится в условии обобщенного плоского напряженного состояния. В таком случае

$$u_2(x,0) = \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4E_2 t\pi} \int_0^L \left(\ln \frac{1}{|x-s|} + u_0 \right) q(s)\, ds \tag{2}$$

где $u_2(x,0)$ -горизонтальное перемещение точки пластины при $y = 0$, а остальные обозначения те же, что и выше.

Далее, полагая, что слой клея находится в условии чистого сдвига [1], получим

$$u_1(x) - u_2(x,0) = \gamma_k \eta, \quad q(x) = b\tau(x) = bG\gamma_k \tag{3}$$

где $u_1(x)$–перемещение точки стрингера, γ_k–деформация сдвига слоя клея, $\tau(x)$–касательные напряжения в слое клея. В силу вышесказанного, относительно стрингера будем иметь:

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} = \frac{1}{E_1 A} q$$

Имея в виду, что (3)

$$q(x) = \frac{[u_1(x,0) - u_2(x,0)] bG}{\eta}$$

окончательно получим

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} - \alpha^2 u_1 = -\alpha^2 u_2 \tag{4}$$

где $\alpha^2 = bG/\eta E_1 A$.

Отметим, что должны иметь место и граничные условия

$$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=L} = \frac{P}{E_1 A} \tag{5}$$

Решение граничной задачи (4), (5) ищем в виде

$$u_1(x) = A_1 \mathrm{ch}\alpha x + B_1 \mathrm{sh}\alpha x + \overset{0}{u}(x)$$

где $\overset{0}{u}(x)$ является решением уравнения (4) при нулевых граничных условиях, т.е. в (5) надо положить $P = 0$. $\overset{0}{u}(x)$ определяется в виде

$$\overset{0}{u}(x) = \alpha^2 A u_2$$

где

$$Au_2 = \int_0^L k(x,s)u_2(s)ds$$

$$k(x,s) = \frac{1}{2\alpha \mathrm{sh}\alpha L}\begin{cases} \mathrm{ch}[\alpha(L-x-s)] + \mathrm{ch}[\alpha(L-x+s)] & x > s \\ \mathrm{ch}[\alpha(L-x-s)] + \mathrm{ch}[\alpha(L+x-s)] & x < s \end{cases}$$

Очевидно, что $k(x,s)$ – непрерывная функция и $k(x,s) = k(s,x)$

Далее, удовлетворив граничным условиям (5), будем иметь

$$u_1(x) = \overset{0}{u}_1(x) + \alpha^2 \int_0^L k(x,s)u_2(s)ds \tag{6}$$

где

$$\overset{0}{u}_1(x) = \frac{P\mathrm{ch}\alpha x}{E_1 A\alpha \mathrm{sh}\alpha L}$$

Теперь, имея в виду (3), из (6) получим

$$\frac{\eta}{bG}q(x) + u_2(x) = \alpha^2 \int_0^L k(x,s)u_2(s)ds + \overset{0}{u}_1(x) \tag{7}$$

Тогда, в силу того, что имеем равенство (2), уравнение (6) запишется в виде

$$q(x) + \gamma^2\left(\int_0^L \ln\frac{1}{|x-s|}q(s)ds - \alpha^2 \int_0^L k(x,s)\int_0^L \ln\frac{1}{|s-\tau|}q(\tau)d\tau ds\right) = -\gamma^2 u_0 \int_0^L q(s)ds +$$

$$+\alpha^2\gamma^2 u_0 \int_0^L k(x,s)ds \cdot \int_0^L q(s)ds + \frac{bG}{\eta}\overset{0}{u}_1 \tag{8}$$

Здесь обозначения γ^2, b, G, η, u_0 те же, что и во второй странице.

Для дальнейшего заметим, что спектром симметрического оператора $D = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2$, областью определения которого являются дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $(du/dx)_{x=0} = 0$, $(du/dx)_{x=L} = 0$, являются собственные значения $\lambda_n = \alpha^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}(n = 0,1,2,...)$, а соответствующими собственными функциями являются функции $\cos(n\pi x/L)$. С другой стороны, как известно [3], самосопряженный вполне непрерывный оператор A является обратным оператором оператора D. Это означает, что

$$A\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_0^L k(x,s)\cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right)ds = \frac{L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)(n = 0,1,2) \tag{9}$$

Теперь, после замены в (8) x на Lx, а s - на Ls, получим

$$q(x) + \gamma^2 L\left(\int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}q(s)ds - \alpha^2 L\int_0^1 k(x,s)\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-\tau|}q(\tau)d\tau ds\right) = -\gamma^2 u_0 \int_0^L q(s)ds +$$

$$+\alpha^2\gamma^2 u_0 \int_0^L q(s)ds \int_0^L k(x,s)ds + \gamma^2 L\int_0^1 q(s)ds \ln L - \ln L\gamma^2\alpha^2 L^2 \int_0^1 k(Lx,Ls)ds + \overset{0}{u}_1(Lx). \tag{10}$$

Если теперь учесть (9), из (10) окончательно получим искомое интегральное уравнение:

$$p(x)+\gamma^2 L\int_0^1 \Pi(x,s)p(s)ds = p_0(x), \quad 0\le x\le 1 \tag{11}$$

где

$$p(x)=q(xL), \quad \Pi(x,s)=\ln\frac{1}{|x-s|}-\alpha^2 L\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-\tau|}k(x,\tau)d\tau$$

$$p_0(x)=\frac{P\alpha\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh}\beta}, \quad \beta=\alpha L, \quad 0\le x\le 1$$

Легко видеть из (11), что $p_0(x)$ является решением задачи в случае жесткой пластины, т.е решением уравнения (11) при $E_2\to\infty$, а также ограниченность $p(x)$ при $x\to 0$ и $x\to 1$.

Таким образом, задача свелась к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, ядро интегрального уравнения квадратично интегрируема по двум переменным, правой частью которого является решение поставленной задачи в случае жесткой пластины. В отличие от уравнения (1), здесь неизвестная постоянная отсутствует. Кроме того, надо отметить, что при выводе уравнения (11) мы нигде не пользовались условием равновесия

$$\int_0^1 p(s)ds=\frac{P}{L} \tag{12}$$

Надо полагать, что (12) удовлетворяется автоматически в уравнении (11), поскольку

$$\int_0^1 p_0(s)ds=\frac{P}{L}$$

Действительно, если уравнение (11) записать в виде

$$p(x)+\gamma^2 L\left(\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-x|}p(s)ds-\alpha^2 L\int_0^1 k(x,s)\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-\tau|}p(\tau)d\tau ds\right)=p_0(x), 0\le x\le 1 \tag{13}$$

при этом учитывая, что

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}p(s)ds=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos n\pi x, \quad 0\le x\le 1$$

и имея в виду (9), получим

$$\int_0^1\int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}p(s)dsdx-\alpha^2 L\int_0^1\int_0^1 k(x,s)\left(\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-\tau|}p(\tau)d\tau\right)dsdx=0 \tag{14}$$

откуда и будет следовать наше утверждение

2. Решение уравнения (11) методом последовательных приближений.

Очевидно, что

$$\int_0^1 \Pi^2(x,s)ds\le C_1 \tag{15}$$

где C_1 некоторая постоянная

Известно [4], что при условии (15) последовательные приближения уравнения (11) равномерно сходятся при всех значениях $\gamma^2 L$, которые удовлетворяют неравенству

$$d\gamma^2 L < 1, \; d^2 = \int_0^1\int_0^1 \Pi^2(x,s)dxds$$

Здесь вопрос стоит об оценке величины d, которая, по-видимому, представляет определенный интерес. Для этого уравнение (13), которое равносильно уравнению (11), представим в виде

$$p(x)+\gamma^2 LBCp(x) = p_0(x), 0 \le x \le 1$$

где оператор B действует по формуле

$$B\varphi = \varphi - \alpha^2 L\int_0^1 k(x,s)\varphi(s)ds$$

а оператор C действует по формуле

$$C\varphi = \int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}\varphi(s)ds, 0 \le x \le 1$$

Тогда

$$BC\varphi = \int_0^1 \Pi(x,s)\varphi(s)ds$$

Рассматривая уравнение (11) в $L_2(0,1)$, будем иметь

$$\|BC\|^2 = \int_0^1\int_0^1 \Pi^2(x,s)ds\,dx = d^2$$

Теперь оценим норму оператора BC, т.е. $\|BC\| = d$. Поскольку оператор $B = I - \alpha^2 A$, а спектр оператора A-это числа $\frac{L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2\pi^2}$, то спектром оператора В будут числа $1-\frac{\alpha^2 L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2\pi^2}$. Отсюда следует (поскольку оператор В самосопряженный), что норма оператора В равна единице, т.е $\|B\| = 1$. Значит $\|BC\| \le \|C\|$.

Следовательно, уравнение (11) можно решать методом последовательных приближений при $\gamma^2 L < \frac{1}{\|C\|}$,

где

$$\|C\| = \sqrt{\int_0^1\int_0^1 \ln^2|x-s|dxds} = \frac{\sqrt{14}}{2} \qquad (16)$$

3. Решение уравнения (11) методом бесконечных систем.

Решение уравнения (11) ищем в виде

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\pi x \qquad (17)$$

Тогда, имея в виду (9), (14), уравнение (11) можно свести к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений

$$b_m + \gamma^2 L^2 \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2\pi^2 + \alpha^2 L^2} K_{mn} b_n = \frac{2P\alpha\beta\cos m\pi}{\beta^2 + m^2\pi^2}, m = 1,2,... \qquad (18)$$

где

$$K_{mn} = \int_0^1\int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}\cos m\pi x dx \cos n\pi s ds$$

$$\int_0^1 p_0(s)\cos m\pi s ds = \frac{P\alpha\beta\cos m\pi}{\beta^2 + m^2\pi^2}, m = 0,1,2,...$$

Квазиполная регулярность системы (18) следует из (15) [4]. Она имеет место при $\gamma^2 L < \frac{1}{\|C\|}$ (16). Причем ряд (17) сходится равномерно [4].

В конце отметим, как оказалось выше (в отличие от работы [1] (1)), решение задачи $q(x)$ не содержит постоянную u_0. Этого надо было ожидать, поскольку, как известно, напряженное состояние в плоской задаче теории упругости не зависит от постоянной плоской задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L., Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bonded to an infinite sheet. - J. of Mech. and Applied Math., vol.XXIII, Pt.4, 1970.
2. Саркисян В.С., Кероян А.В. Решение задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеена накладка конечной длины // Юбилейная науч. конф., посв. 60-летию основания пед. института им. Налбандяна. Сб. науч. трудов, т.1, "Высшая школа" Гюмри, 1994, с. 73-76.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс.-М.: Гостехиздат, 1961.
4. Михлин С.Г. Интегральные уравнения.- М.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1947.

Ереванский
госуниверситет

Поступила в редакцию
24.12.1999