

УДК 517.9

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ

$$u_{xx} - u_x^m u_y^n u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$$

Асаян А. Д., Оганесян А. О.

Դ.Ջ. Հասանյան, Ա.Օ. Ոսկանյան

$$u_{xx} - u_x^m u_y^n u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q \quad \text{հավասարման ինվարիանտ լուծումները}$$

Աշխատանքում խմբային անալիզով ինվարիանտ լուծումների որոշման հարցը հանգեցվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը: Դիտարկված են անալիտիկ լուծման հնարավոր դեպքեր:

D.J. Hasanyan, A.H. Hovanesyan

$$\text{Invariant solutions of } u_{xx} - u_x^m u_y^n u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$$

В работе на основе группового анализа нахождение инвариантных решений сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются случаи, когда возможно аналитическое решение.

1. Введение

В [1] был проведен групповой анализ уравнения с частными производными вида

$$u_{xx} - u_x^m u_y^n u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q \quad (1)$$

где $m, n, p, q \in R$ — произвольные постоянные; $g(u) \in C^2(R)$. Полученные группы преобразований, относительно которых уравнение (1) остается инвариантным, позволяют строить инвариантные решения уравнения (1). Эти решения удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые в некоторых случаях решаются аналитически. В конце рассматриваются физические примеры, решения которых сводятся к частным случаям уравнения (1).

2. Симметрические решения уравнения (1)

Результаты работы [1] можно компактно представить в виде табл. 1 и 2. На основе этих результатов строятся некоторые симметрические решения уравнений (1). Эти решения будут выражаться формулой

$$I_2 = F(I_1) \quad (2)$$

где $I_1 = \varphi_1(x, y, u)$ и $I_2 = \varphi_2(x, y, u)$ — произвольные инварианты соответствующей группы симметрий [2].

Если функцию u , найденную из (2), подставить в (1), то получим обыкновенное дифференциальное уравнение. Таким образом, нахождение симметрических решений уравнения с частными производными (1) сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, которые иногда решаются до конца. Приведем для некоторых случаев замену переменных и обыкновенное дифференциальное уравнение. Например, подробно рассмотрим случай V) (см. [1]).

V) $n \neq 0, 1, 2$; m — произвольное число. Тогда можно выделить следующие подслучаи:

a) $g(u) = A(u + \alpha)^k$. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$u + \alpha = (x + \frac{c_2}{c_1})^{c_1/c_3} F(\theta); \theta = (x + \frac{c_2}{c_1})^{c_1/c_3} (y + \frac{c_4}{c_3})^{-1} \quad (3)$$

Таблица 1

$g(u)$	$m, n, p, q, \alpha, \beta$	Инфинитезимальная группа
$A(u + \alpha)^k$ $A, \alpha, \beta = \text{const}$	$n \neq 0, 1, 2$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4, \eta = c_5 u + c_6,$ $c_5 = -c_1 / (1 + 2\beta), c_6 = \alpha c_3, c_3 = \beta c_1 / (1 + 2\beta)$
	$n = m = p =$ $= q = 0, \beta \neq 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2 y + c_3, \xi^2 = c_2 x + c_1 y + c_4,$ $\eta = 2c_1(u + \alpha) / (1 - \beta),$
	$n = m = p =$ $= q = 0, \beta = 1$	$\xi^1 = c_2 y + c_3, \xi^2 = c_2 x + c_4,$ $\eta = c_1 u + a(x, y), a_{xx} - a_{yy} - a = 0$
	$n = m = q = 0,$ $\beta = -1, p = 2$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_3,$ $\eta = (c_4 x + c_5)(u + \alpha),$
	$m = q = p = 0,$ $\beta = 0, n = 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4,$ $\eta = c_5 u + c_6 y + c_7, c_5 = 2c_1, c_3 = 3c_1 / 2$
	$m = q = \beta = 0,$ $n = 1, p = 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = (c_1 + c_3)y / 2 + c_4,$ $\eta = c_5 u + c_6 A y^2 / 2 + c_7 y + c_8$
	$m = q = \alpha = 0,$ $\beta = p = n = 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3,$ $\eta = -c_1 u + c_4 e^{\alpha y}, \lambda^2 = A$
	$m = \alpha = 0, q = 2$ $-\beta = p = n = 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \eta = c_3 u + c_5 u y,$ $\xi^2 = (c_1 + c_3)y / 2 + c_6 y^2 / 4 + c_7$
	$m = \beta = 0,$ $n = p, q = 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_4, \eta = c_5 u + c_6 e^{-\lambda y} + c_7,$ $\lambda = A, c_5 = (n - 2)c_1 / n$

Тогда для определения функции $F(\theta)$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{c_5}{c_1} (\frac{c_5}{c_1} - 1) F + \theta F' \frac{c_3}{c_1} (2 \frac{c_5}{c_1} - 1 + \frac{c_3}{c_1}) + (\frac{c_3}{c_1})^2 \theta^2 F'' - (-1)^m \theta^{2(m+1)} (F')^m \times \\ & \times [\frac{c_5}{c_1} F + \frac{c_3}{c_1} \theta F']^n \frac{d}{d\theta} (\theta^2 F') = (-1)^q A \theta^{2q} F^p [\frac{c_5}{c_1} F + \frac{c_3}{c_1} \theta F']^p (F')^q \end{aligned} \quad (4)$$

b) $g(u) = A e^{ku}$. Тогда

$$u = \frac{c_5}{c_1} \ln(x + \frac{c_2}{c_1}) + F(\theta), \theta = (x + \frac{c_2}{c_1})^{c_1/c_3} (y + \frac{c_4}{c_3})^{-1} \quad (5)$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид

$$-\frac{c_5}{c_1} + \frac{c_3}{c_1} (\frac{c_3}{c_1} - 1) \theta F' + (\frac{c_3}{c_1})^2 \theta^2 F'' - (-1)^m \theta^{2(m+1)} [\frac{c_5}{c_1} + \frac{c_3}{c_1} \theta F'] (F')^m \times$$

$$\times [\theta F' + \theta^2 F''] = A(-1)^q \theta^{2q} (F')^q \left[\frac{c_1}{c_1} + \frac{c_2}{c_1} \theta F' \right]^p e^{F'} \quad (6)$$

Таблица 2

$g(u)$	m, n, p, q	Инфинитезимальная группа
$Ae^{\lambda u}$ $A, \lambda = \text{const}$ $\lambda \neq 0$	$n \neq 0, 1, 2$ $n + m \neq 0$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_3, \eta = c_4$ $c_4 = c_1 [(n+m)(p-2) + q(2-n)] / \lambda(n+m)$ $c_3 = (2-n)c_1 / (n+m)$
	$n = m = p = q = 0$	$\xi^1 = \varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y), \xi^2 = -\varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y), \eta = -2[\varphi_1'(x-y) + \varphi_2'(x+y)]$
	$n = m = 0$ $p, q = \forall$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_3$ $\eta = c_4, c_4 = (p-2+q)c_1 / \lambda$
произвольная	$n, m, q, p = \forall$ $n + m \neq 0$	$\xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2$ $\eta = 0$
	$n + m = 0$ $p + q = 2$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_3$ $\eta = 0$
	$n = 2, m = -2$ $p + q \neq 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_3$ $\eta = [g(u)]^{-\alpha} (c_4 + \beta) \int [g(u)]^\alpha du$ $\alpha = 1/(p+q-1), \beta = [c_1(p-2) + qc_3] \alpha$
	$n = 2, m = -2$ $p + q = 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_3$ $\eta = g(u)[c_1(p-2) + qc_3] / g'(u)$

c) $n + m = 0, p + q = 2, g(u)$ - произвольно, тогда замена переменных

$$u = F(\theta), \theta = (x + \alpha)(y + \beta)^{-1}$$

приводит уравнение (1) к виду

$$\theta^2 F'' - [\theta^4 F''' + 2\theta^3 F''] (\theta F')^q (-\theta^2 F')^m = g(F) (\theta F')^p (-\theta^2 F')^q \quad (7)$$

d) $g(u)$ - произвольная функция, $n + m \neq 0$. Тогда подстановка

$$u = F(\theta), \theta = x - \frac{c_1}{c_2} y \quad (8)$$

приводит к следующему уравнению для неизвестной функции F

$$F'' [1 - (-1)^m \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{m+2} (F')^{m+2}] = \left(-\frac{c_1}{c_2} \right)^q g(F) (F')^{p+q} \quad (9)$$

Рассмотрим некоторые подслучаи из случая 1) (см. [1]). Например, в случае c), когда $p = q = 0$ и $g(u) = e^{-2iu}$, после замены переменных

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln y + F(\theta), \theta = y - \frac{x^2}{y} \quad (10)$$

уравнение [1] сводится к уравнению

$$2\theta F' - \theta^2 F'' = e^{-2\lambda F} \quad (11)$$

В табл. 3 приведена замена переменных и полученные обыкновенные дифференциальные уравнения (1). В табл. 3 приведены также некоторые другие дополнительные дифференциальные уравнения, рассмотренные в [1].

Таблица 3

Случай	Замена переменных	Дифференциальное уравнение
$g(u) = A(u + \alpha)^\beta$ $\beta \neq 1$ $n = m = p = q = 0$	$u + \alpha = (x + \gamma y + \delta)^{2/(1-\beta)} F(\theta)$, $\theta = (x + \gamma y + \delta)(y + \gamma x + e)^{-1}$	$2(1 + \beta)(1 - \gamma^2)F(\theta)/(1 - \beta)^2 +$ $+(1 - \gamma^2)[4\theta/(1 - \beta) -$ $- 2\theta^3]F'(\theta) + \theta^2(1 - \theta^2)F''(\theta)$ $= AF^\beta(\theta)$
$g(u) = \lambda^2 u$ $n = p = 1$ $m = q = 0$	$u = ae^{\lambda y} + be^{-\lambda y} + (x + c)^{-1} F(\theta)$ $\theta = (x + c)e^{-\lambda y}$, $a = c_4 / c_1$, $b = c_5 / c_1$, $c = c_2 / c_1$, $d = c_1 / c_3$	$2F - 2\theta F' + \theta^2 F'' - d^2[-F + \theta F']$ $\times [\theta F' + \theta^3 F''] = \lambda^2 F[-F + \theta F']$
$n = m = q = 0$ $p = 2$ $g(u) = 2(u + \alpha)^{-1}$	$u + \alpha = (x + \alpha_1)^r e^{\alpha_2 y} F(\theta)$, $\theta = (x + \alpha_1)(y + \alpha_2)^{-1}$	$F'''(\theta) - \theta F''(\theta) - 2F'(\theta) -$ $- [F'(\theta)]^2 = 0$
$m = 0$ $n = p, q = 1$ $g(u) = A = \text{const}$	$u = (x + c_2 / c_1)^{c_3 / c_1} F(\theta) -$ $- c_6 e^{\lambda y}$ $\theta = c_1 y / c_4 + \ln(x + c_2 / c_1)$	$(b - 1)(bF + F') + bF' + F'' -$ $- F'''[bF + F']^n =$ $= -\lambda F'[bF + F']^n$, $b = c_5 / c_1$
$n = p = 1$ $m = q = 0$ $g(u) = \lambda$	$u = -\lambda y^2 / 2 + c_4 y / c_1 +$ $+ c_6 / c_1 + (x + c_2 / c_1)F(\theta)$ $\theta = (x + c_2 / c_1)(y + 2c_3) /$ $/ (c_1 + c_3)^{-2c_1 / (c_1 + c_3)}$	$b(b - 1)F + 2b\theta F' + \theta^2 F'' -$ $- 2a[bF + \theta F'] \cdot [(1 + 2a) \times$ $\times \theta F' + 2c\theta^2 F''] = 0$ $b = c_5 / c_1$, $a = 1 / (1 + b)$ $c = 2 / (1 + c_3 / c_1)$

3. Аналитические решения для уравнения (1)

Приведем некоторые примеры, когда дифференциальное уравнение (1) решается аналитически. В случае VI) (см. [1]), когда $m = 0$, $n = \forall$, $p = n$, $q = 1$, $g(u) = A = \text{const}$, после замены переменных

$$u(x, y) = (x + c_2 / c_1)^{c_3 / c_1} F(\theta) - c_6 e^{\lambda y} / c_5 \quad (12)$$

где $\theta = c_1 y / c_4 + \ln(x + c_2 / c_1)$, уравнение (1) сводится к

$$\left(\frac{c_3}{c_1} - 1\right)\left(\frac{c_3}{c_1} F + F'\right) + \frac{c_3}{c_1} F + F'' - F' \left[\frac{c_3}{c_1} F + F'\right]^n = -\lambda F' \left(\frac{c_3}{c_1} F + F'\right)^n \quad (13)$$

Если положить $\lambda = -c_3/c_1$, то можно снизить порядок уравнения (13) и получить:

1) при $Z \neq 0$ имеем

$$\ln Z - Z^n/n = (\lambda + 1)\theta + A_0, A_0 = \text{const} \quad (14)$$

где $Z = -\lambda F + F'$

2) при $Z = 0$ имеем

$$F' - \lambda F = 0, \text{ или } F = Be^{\lambda\theta}, B = \text{const} \quad (15)$$

Рассмотрим случай II). При $p = 1, q = 1, g(u) = \lambda = \text{const}$, после замены переменных

$$u(x, y) = \frac{c_4}{c_1} e^{-\lambda y} + \frac{c_3}{c_1} + (x + \frac{c_2}{c_1})^{-1} F(\theta), \quad \theta = (x + \frac{c_2}{c_1}) e^{-\frac{c_1}{c_3} y} \quad (16)$$

для определения функции $F(\theta)$ получим следующее уравнение

$$\theta^2 F'' - 2F' - (\frac{c_1}{c_3})^2 (\theta F' + F)(\theta^2 F'' + \theta F') = -\lambda \frac{c_1}{c_3} \theta (\theta F' + F) F' \quad (17)$$

Уравнение (17) получено при условии $c_1 \neq 0$. Если $c_1 = 0$, то после замены переменных

$$u(x, y) = -\frac{c_4}{\lambda c_3} e^{-\lambda y} + \frac{c_3}{c_3} y + F(\theta), \text{ где } \theta = x - \frac{c_2}{c_3} y \quad (18)$$

Тогда для определения функции $F(\theta)$ получим

$$F' [1 - (\frac{c_2}{c_3})^2 F] = \lambda F' (\frac{c_3}{c_3} - \frac{c_2}{c_3} F) \quad (19)$$

Легко заметить, что уравнение (19) имеет решение

$$F = Be^{\gamma\theta} \text{ где } \gamma = \lambda \frac{c_3}{c_1}, c_3 = \frac{c_2^2}{c_1} \quad (20)$$

4. Физические примеры

4.1. Продольные колебания балки. Известно [3], что продольные колебания балки под действием продольной силы F описываются уравнением вида

$$\rho u_{tt} - \sigma_{,t} = F(x, t, u, u_t, u_{tt}, \dots) \quad (21)$$

где ρ , u и σ — плотность, перемещение и усилие балки (здесь t — время, x — продольная координата). В частном случае, когда

$F(x, t, u, u_t, u_{tt}, \dots) = g(u) u_t^{q-n}$ и $\sigma = E_0 u_t^{m-1}$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$, уравнение (21) после очевидного преобразования принимает вид (1).

4.2. Одномерный газ. Уравнение движения сферически симметричного одномерного газа можно представить в виде [4.5]

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_r + 2\rho ur^{-1} &= 0 \\ u_t + uu_r + p^{-1} p_r &= 0 \\ p &= c^2 \rho, c^2 = \text{const.} \end{aligned} \quad (22)$$

где c, ρ, p, u - скорость звука, плотность, давление, перемещение среды, соответственно. Введя функцию $\mu(r, t)$ по формулам

$$\rho r^2 = \mu_r, \quad \rho u r^2 = -\mu, \quad (23)$$

и перейдя от переменных (t, r) к (τ, μ) , где $t_\tau = 1, t_\mu = 0$, можно показать, что для решения системы (22) достаточно решить уравнение

$$r_{\tau\tau} - r_\tau^2 r_{\mu\mu} = 2r^{-1} \quad (24)$$

и по формулам (23) восстановить функции ρ и u . Уравнение (24) совпадает с (1) при $n = p = q = 0, m = -2, f(u) = 2u^{-1}$. Как заметил М. М. Минасян [5], уравнение вида (1) получается также для общей модели политропного газа ($p = c^2 \rho^{\gamma'}$). В этом случае получается уравнение

$$r_{\tau\tau} - r_\tau^{-\gamma'(\gamma'+1)} r_{\mu\mu} = 2r^{-1} \quad (25)$$

которое тоже имеет вид (1).

4.3. Уравнения мелкой воды. Система уравнений мелкой воды переменной глубины имеет вид [2,4]

$$\eta_t + [(\eta + h)u]_x = 0, \quad u_t + uu_x + g\eta_x = 0 \quad (26)$$

где $\eta(x, t)$ - форма волны, $h(x)$ - переменная глубина, $u(x, t)$ - горизонтальная скорость частиц жидкости на свободной поверхности и g - ускорение свободного падения [4,5]. Если с помощью формул

$$\eta + h = \mu_x, \quad (\eta + h)u = -\mu,$$

перейти к переменным (τ, μ) , где $t_\tau = 1, t_\mu = 0$, то получим уравнение

$$x_{\tau\tau} - x_\tau^{-3} x_{\mu\mu} = h'(x) \quad (27)$$

которое совпадает с уравнением (1), когда $n = p = q = 0, m = -3, f(x) = h'(x)$. Решение последнего, как и в предыдущем примере, позволяет найти решение системы (26).

Отметим, что в последних двух примерах материальные постоянные приняты равным единице.

Все приведенные примеры имеют только иллюстративный характер, показывающий, что уравнение вида (1) может получиться в различных отраслях механики.

Выражаем благодарность М. М. Минасяну за сделанные замечания и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асаян Д.Д., Оганесян А.О. Групповой анализ уравнения $u_{xx} - u^n u_x u_{xx} = g(u) u_x^2 u_{xx}$. Изв. НАН Армении, Механика, 2000. 53, №1, с. 34-42.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. -М.: Наука, 1983.
3. Arrigo D.J., Group Properties of $u_{xx} - u^n u_{yy} = f(u)$ - Int. J. Non-Linear Mech., 26(1), 619-629, 1991.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Ж.- Теория упругости. М.: Наука, 1970.
5. Arrigo D.J., Wentzell R.A., Lastman G.J. Motion of planar bubble boundaries.-Int. J. Non-Linear Mech., 25(1), 87-97, 1990.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.02.1999