

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТ-  
 РАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ЭЛЕКТРОДОВ

Бардзокас Д.И., Сеник Н.А

Գ. Ի. Բարձոկաս, Ն. Ա. Սենիկ

Էլեկտրոդների պարբերական համակարգով պլեզոէլեկտրիկ կիսատարածության  
 տատանումները

Հետազոտվում է էլեկտրոդների պարբերական համակարգով պլեզոէլեկտրիկ  
 կիսատարածության մեջ ալիքների զրգոման հարցը և արդյունքում ցույց է տրվում, որ որոշակի  
 պայմանների դեպքում տատանումները տեղայնացվում են կիսատարածության մակերևույթի  
 շուրջը:

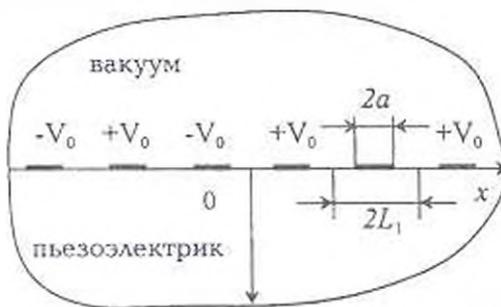
D.I. Bardzokas, A.N. Senik

Oscillations of Piezoelectric Half-Space with Periodic System of Electrodes

Исследуется вопрос о возбуждении волны в пьезоэлектрическом полупространстве с  
 периодической системой электродов, в результате чего показывается, что при определенных  
 условиях колебания локализируются у его поверхности.

Пьезоэлектрические среды с поверхностными электродами находят  
 широкое применение в различных устройствах акустоэлектроники в  
 качестве фильтров, источников и приемников акустических волн.  
 Исследованию таких устройств посвящена достаточно обширная  
 литература. В частности, в работе [1] исследовались электроупругие волны  
 Релея, возбуждаемые парой поверхностных электродов, в работах [2,3]  
 исследовано возбуждение волн Релея конечной системой электродов в  
 приближенной постановке, когда пренебрегают взаимосвязью  
 электрических и упругих полей и определяют электрическое поле для  
 периодической системы электродов. В работе [4] приведен обзор работ,  
 связанных с исследованием различных волн в пьезоэлектриках.

В предлагаемой работе исследуется возбуждение волны в  
 пьезоэлектрическом полупространстве с периодической системой  
 электродов. Показано, что в полупространстве при выполнении некоторых  
 условий колебания локализованы у поверхности. Аналогичная задача  
 рассмотрена в [5] другим методом.



Փիգ. 1

1. Рассмотрим задачу о  
 возбуждении колебаний в  
 пьезоэлектрическом полупро-  
 странстве двухфазной систе-  
 мой невесомых электродов –  
 полос. Пусть  $2a$  обозначает  
 ширину любого электрода, а  
 $2L_1$  – расстояние между цент-  
 рами незелектродированных  
 участков (фиг.1).

Предполагается, что гра-

ническая плоскость полупространства свободна от механических нагрузок, а полупространство  $z < 0$  занято вакуумом, свойства которого учитываются. В этом случае можно считать, что электроупругие поля не зависят от переменной  $y$  и задача определения гармонических электроупругих полей, возбуждаемых разностью потенциалов на электродах, сводится к определению решения двумерных уравнений электроупругости для амплитудных составляющих перемещений  $u, w$  и потенциала электрического поля  $\varphi$

$$\begin{aligned} c_{11}u_{,xx} + c_{44}u_{,zz} + (c_{13} + c_{44})w_{,xz} + (e_{31} + e_{15})\varphi_{,xz} + \rho\omega^2 u &= 0 \\ (c_{13} + c_{44})u_{,xz} + c_{44}w_{,xx} + c_{33}w_{,zz} + e_{33}\varphi_{,zz} + e_{15}\varphi_{,xz} + \rho\omega^2 w &= 0 \\ (e_{31} + e_{15})u_{,xz} + e_{33}w_{,zz} + e_{15}w_{,xx} - \varepsilon_{11}\varphi_{,xz} - \varepsilon_{33}\varphi_{,zz} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем временной фактор  $\exp(-i\omega t)$  опускается.

Введем новых относительных величин соотношениями ( $L_1$  — характерный линейный размер)

$x_* = x/L_1, z_* = z/L_1, u_* = u/L_1, w_* = w/L_1, \varphi_* = \varphi/\gamma_0, \gamma_0 = c_{11}/(e_{31} + e_{15})$   
преобразуем систему (1.1) к виду

$$\begin{aligned} u_{,x_*x_*} + \mu_1 u_{,z_*z_*} + \mu_2 w_{,x_*z_*} + \varphi_{,x_*z_*} + l^2 u &= 0 \\ \mu_2 u_{,x_*z_*} + \mu_1 w_{,x_*x_*} + \mu_4 w_{,z_*z_*} + \mu_5 \varphi_{,z_*z_*} + \mu_6 \varphi_{,x_*z_*} + l^2 w &= 0 \\ - (k_1^2 u_{,x_*x_*} + k_3 w_{,x_*z_*} + k_2 w_{,z_*z_*}) + \mu_7^2 \varphi_{,x_*z_*} + \varphi_{,z_*z_*} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\mu_1 = c_{44}/c_{11}, \mu_2 = (c_{13} + c_{44})/c_{11}, \mu_4 = c_{33}/c_{11}, \mu_5 = e_{33}/(e_{31} + e_{15})$$

$$\mu_6 = e_{15}/(e_{31} + e_{15}), \mu_7^2 = \varepsilon_{11}/\varepsilon_{33}, k_1^2 = (e_{31} + e_{15})^2/(c_{11}\varepsilon_{33})$$

$$k_2 = e_{15}(e_{31} + e_{15})/(c_{11}\varepsilon_{33}), k_3 = e_{33}(e_{31} + e_{15})/(c_{11}\varepsilon_{33})$$

$$l^2 = \rho\omega^2 L_1^2/c_{11} = \omega^2 l^2/V_r^2 = (2\pi L_1/\lambda_r)^2, V_r^2 = c_{11}/\rho, \lambda_r = 2\pi V_r/\omega$$

Заметим, что в (1.2) у всех величин знак "\*" опущен.

Решения уравнений электроупругости (1.2) с учетом периодичности полей по переменной  $x$  представляются в форме

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\theta_k z) \sin \theta_k x, \quad \theta_k = \pi(2k+1)L_0/L_1 \\ w(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} W_k(\theta_k z) \cos \theta_k x, \quad \varphi(x, z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(\theta_k z) \cos \theta_k x \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $L_0$  — характерный линейный размер задачи.

Подстановка выражений (1.3) в уравнения (1.2) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой представляется в виде

$$U_k = A_k \exp(\lambda_k \theta_k z), \quad W_k = B_k \exp(\lambda_k \theta_k z), \quad \Phi_k = F_k \exp(\lambda_k \theta_k z)$$

что приводит к однородной системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 (1 - \mu_1 \lambda_k^2 - \nu_k^2) A_k - \mu_2 \lambda_k B_k - \lambda_k F_k &= 0 \\
 -\mu_k \lambda_k A_k + (-\mu_1 + \mu_4 \lambda_k^2 + \nu_k^2) B_k + (\mu_5 \lambda_k^2 - \mu_6) F_k &= 0 \\
 -k_1^2 \lambda_k A_k + (-k_2 + k_3 \lambda_k^2) B_k + (\mu_7^2 - \lambda_k^2) F_k &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Здесь  $\nu_k^2 = \rho \omega^2 L_0^2 / (c_{11} 0_k^2)$ .

Условие существования нетривиального решения системы (1.4) приводит к характеристическому уравнению

$$\det \| a_{ij}^{(k)} \| = 0 \tag{1.5}$$

где  $a_{ij}^{(k)}$  — элементы матрицы системы (1.4). Заметим, что величины  $a_{ij}^{(k)}$  могут быть получены из соответствующих величин  $a_{ij}$ , введенных в [1],

если произвести формальную замену параметров  $\lambda$  на  $\lambda_k$  и  $\nu$  на  $\nu_k$ . С учетом указанной замены развернутый вид уравнения (1.5) аналогичен уравнению (1.7) работы [1], корни которого проанализированы при непрерывном изменении частотного параметра  $\nu$ . Естественно, что при дискретном изменении этого параметра корни уравнения (1.5) могут быть легко определены, если только частота колебаний известна.

Определяя собственные функции соотношениями

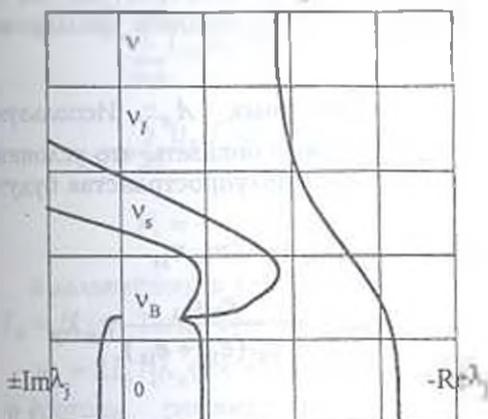
$$\alpha_{jk} = \alpha(\lambda_{jk}) = a_{12}^{(k)}(\lambda_{jk}) a_{23}^{(k)}(\lambda_{jk}) - a_{13}^{(k)}(\lambda_{jk}) a_{22}^{(k)}(\lambda_{jk})$$

$$\beta_{jk} = \beta(\lambda_{jk}) = a_{21}^{(k)}(\lambda_{jk}) a_{13}^{(k)}(\lambda_{jk}) - a_{11}^{(k)}(\lambda_{jk}) a_{23}^{(k)}(\lambda_{jk})$$

$$\gamma_{jk} = \gamma(\lambda_{jk}) = a_{11}^{(k)}(\lambda_{jk}) a_{22}^{(k)}(\lambda_{jk}) - a_{12}^{(k)}(\lambda_{jk}) a_{21}^{(k)}(\lambda_{jk})$$

для величин (1.3) получим

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \alpha_{kj} \exp(\lambda_{jk} \theta_k z) A_{jk} \sin \theta_k x \\
 w(x, z) &= - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \beta_{kj} \exp(\lambda_{jk} \theta_k z) A_{jk} \cos \theta_k x \\
 \varphi(x, z) &= - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \gamma_{kj} \exp(\lambda_{jk} \theta_k z) A_{jk} \cos \theta_k x
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$



Фиг. 2

Здесь  $\lambda_{jk}$  — корни характеристического уравнения (1.5), выбор которых согласован с условиями излучения. неизвестные постоянные  $A_{jk}$  должны быть определены из граничных условий.

Отметим, что при фиксированной частоте колебаний  $\omega$  последовательность  $\nu_k$  является убывающей и имеет нулевой предел. На фиг. 2 представлено качественное

поведение трех корней уравнения (1.5) для непрерывного изменения частотного параметра. Область изменения параметра  $v$  разбита на четыре характерных интервала:

$$1. 0 \leq v \leq v_1, \quad 2. v_1 \leq v \leq v_2, \quad 3. v_2 \leq v \leq v_3, \quad 4. v_3 \leq v < \infty$$

Первые два интервала характерны тем, что корни характеристического уравнения здесь имеют отрицательные действительные части (при этом мнимые части некоторых из корней могут отсутствовать). В оставшихся двух интервалах действительные части некоторых из корней отсутствуют. Заметим, что

$$v_1 = 1, \quad v_2 = V_r / V_s, \quad V_s^2 = c_{44}(1 + k_{15}^2) / \rho, \quad V_r^2 = c_{11} / \rho, \quad v_3 < 1$$

а  $v_3$  определяется из условия обращения в нуль дискриминанта бикубического уравнения (1.5).

Если частота возбуждаемых колебаний такова, что при  $n=0$  параметр  $v_0 = 2\omega L_1 / \pi V_s$  удовлетворяет условию  $v_0 < v_1$ , то, как следует из (1.6), колебания оказываются локализованными у свободной поверхности полупространства, причем чем выше номер гармоники Фурье, тем быстрее происходит затухание полей при удалении от свободной поверхности. Таким образом, частоту  $\omega$ , определяемую выражением

$$\omega_p = v_1 \pi V_r / 2L_1 = \pi V_s / 2L_1 \quad (1.7)$$

можно назвать частотой запираения, так как при  $\omega < \omega_p$  колебания локализованы у свободной поверхности.

Если выполнено условие  $v_1 < v_0 < 1$ , то среди корней характеристического уравнения имеется один корень с нулевой действительной частью и тогда, как следует из (1.7), в глубь полупространства распространяется некоторое количество гармоник, причем эти объемные волны являются однопарциальными. При дальнейшем увеличении параметра  $v_0$ , когда  $v_0 > 1$ , количество распространяющихся гармоник растет и некоторые из них становятся двухпарциальными (моды с низшими номерами), а оставшиеся — однопарциальными. Отметим, что моды, номера которых удовлетворяют условию

$$k > N_*, \quad N_* = [\omega L_1 / \pi V_s - 1/2]$$

являются нераспространяющимися. Таким образом, полупространство с периодической системой электродов является своеобразным фильтром, характеризующимся частотой запираения  $\omega_p$ .

Обратимся теперь к определению неизвестных  $A_{jk}$ . Используя соотношения (1.6) и уравнения состояния [2], можно показать, что условия свободной от механических нагрузок поверхности полупространства будут выполнены, если

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \Delta_{jk} U_{0k}, \quad \Delta_{1k} = m_{2k} n_{3k} - m_{1k} n_{2k}, \quad \Delta_{2k} = m_{3k} n_{1k} - m_{1k} n_{3k} \\ \Delta_{3k} &= m_{1k} n_{2k} - m_{2k} n_{1k}, \quad m_{jk} = -\frac{c_{13}}{c_{33}} \alpha_{jk} + \beta_{jk} \lambda_{jk} + \frac{e_{33} c_{11}}{c_{33}(e_{31} + e_{15})} \gamma_{jk} \lambda_{jk} \\ n_{jk} &= \beta_{jk} + \alpha_{jk} \lambda_{jk} + \frac{e_{13} c_{11}}{c_{44}(e_{31} + e_{15})} \gamma_{jk} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Полученные соотношения позволяют определить следующие величины:

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \gamma_{jk} \exp(\lambda_{jk} \theta_k z) U_{0k} \cos \theta_k x \\ D_z(x, z) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 q_{jk} \exp(\lambda_{jk} \theta_k z) U_{0k} \theta_k \cos \theta_k x \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\text{где } q_{jk} = -\gamma_{jk} \lambda_{jk} - \frac{e_{31}(e_{31} + e_{15})}{c_{11} \varepsilon_{33}} \alpha_{jk} + \frac{e_{33}(e_{31} + e_{15})}{c_{11} \varepsilon_{33}} \beta_{jk} \lambda_{jk}$$

Заметим, что распределение потенциала электрического поля в вакууме определяется выражением

$$\bar{\varphi}(x, z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \bar{\Phi}_k \exp(\theta_k z) \cos \theta_k x \quad (1.10)$$

и поэтому для составляющей  $D_{z0}$  индукции имеем формулу

$$\bar{D}_z(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \bar{\Phi}_k \exp(\theta_k z) \cos \theta_k x, \quad \bar{D}_z = D_{z0} / \varepsilon_{33} \quad (1.11)$$

Условие непрерывности потенциалов при  $z = 0$  будет выполнено, если

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^3 \gamma_{jk} \Delta_{jk} U_{0k}$$

а граничные условия

$\varphi(x, 0) = \bar{\varphi}(x, 0) = V_0$  (на электроде),  $\bar{D}_z(x, 0) = D_z(x, 0)$  (вне электрода) приводят к системе парных рядов-уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_{1k}}{R_{2k} + \varepsilon_0 R_{1k}} U_k^* \cos \theta_k x &= -V_0 \frac{(e_{31} + e_{15})}{c_{11} L_0}, \quad 0 \leq x < a \\ \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k U_k^* \cos \theta_k x &= 0, \quad a < x < L \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$R_{1k} = \sum_{j=1}^3 \gamma_{jk} \Delta_{jk}, \quad R_{2k} = \sum_{j=1}^3 q_{jk} \Delta_{jk}, \quad U_k^* = U_{0k} (R_{2k} + \varepsilon_0 R_{1k})$$

2. При решении системы (1.12) учтем, что при  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{nk} = R_n^{\infty}$  ( $n=1,2$ ) и преобразуем систему (1.12) к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} U_k^* \cos \theta_k x &= V_0 - \sum_{k=0}^{\infty} G_k U_k^* \cos \theta_k x, \quad 0 \leq x < a \\ \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k U_k^* \cos \theta_k x &= 0, \quad a < x < L \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$V_0 = -\frac{R_1^{\infty}}{R_2^{\infty} + \varepsilon_0 R_1^{\infty}} V_0 \frac{e_{31} + e_{15}}{c_{11} L_0}, \quad G_k = \frac{R_2^{\infty} R_{1k} - R_1^{\infty} R_{2k}}{R_1^{\infty} (R_{2k} + \varepsilon_0 R_{1k})}$$

В дальнейшем в качестве характерного линейного размера удобно взять  $L_0 = L_1 / \pi$ . Тогда будем иметь

$$v_k = 2L_1 / [\lambda_z (2k+1)] = 2\omega L_1 / [\pi V_z (2k+1)], \quad \theta_k = k + 1/2, \quad \lambda_z = 2\pi V_z / \omega$$

Методы решения парных уравнений-рядов полученного вида достаточно известны [6]. В задачах электроупругости к системе вида (2.1)

сводилась задача для пьезоэлектрической полосы с периодической системой электродов [7].

Определим вспомогательную функцию  $q(x)$ , пропорциональную скачку зарядов на электроде, соотношением

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)U_k^* \cos(k+1/2)x = \begin{cases} \frac{2(e_{31} + e_{15})\Gamma_0}{c_{11}\epsilon_{33}} q(x), & 0 \leq x < a \\ 0, & a < x < \pi \end{cases} \quad (2.2)$$

и тогда из равенства (2.2) найдем

$$U_k^* = \frac{2(e_{31} + e_{15})\Gamma_0}{\pi c_{11}\epsilon_{33}(2k+1)} \int_0^a q(t) \cos(k+1/2)t dt \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в первое уравнение системы (2.1) и переходя к новым переменным в соответствии с формулами

$$s = \xi_1 s_1 + \xi_2, \quad \eta = \xi_1 \eta_1 + \xi_2, \quad \xi_1 = (1 - \alpha_0)/2, \quad \xi_2 = (1 + \alpha_0)/2 \\ s = \cos(t/2), \quad \eta = \cos(x/2), \quad \alpha_0 = \cos(a/2)$$

приходим к следующему интегральному уравнению ( $-1 < \eta < 1$ ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_1(s_1) \ln \left| \frac{s_1 + \eta_1 + 2 \operatorname{ctg}^2(\alpha/4)}{s_1 - \eta_1} \right| ds_1 = 1 - \\ - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 q_1(s_1) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k T_{2k+1}(\xi_1 s_1 + \xi_2) T_{2k+1}(\xi_1 \eta_1 + \xi_2)}{k+1/2} \right\} ds_1 \quad (2.4)$$

Здесь обозначено

$$q_1(s_1) = \frac{q[t(s_1)]}{\sqrt{1 - (\xi_1 s_1 + \xi_2)^2}}, \quad \Gamma_0 = \frac{\pi V_0}{L \sin^2(\alpha/4)} \frac{R_2^{\alpha} + \epsilon_0 R_1^{\alpha}}{R_1^{\alpha}} \quad (2.5)$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (2.4) представим в форме ряда по полиномам Чебышева

$$q_1(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1-s_1^2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m T_m(s_1) \quad (2.6)$$

при этом вспомогательная функция  $q(t)$  будет определяться формулой

$$q(t) = \frac{\sin(a/4) \cos(t/4)}{\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m T_{2m}(\tau), \quad \tau = \sin(t/4) \sin(a/4) \quad (2.7)$$

Коэффициенты разложения в (2.6) определяются решением бесконечной системы уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m (\alpha_{ms} + \gamma_{ms}) = \delta_s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

коэффициенты которой определяются формулами

$$\alpha_{ms} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_m(t) T_s(\tau)}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} \ln \left| \frac{(1-\alpha_0)(t+\tau) + 2(1+\alpha_0)}{(1-\alpha_0)(t-\tau)} \right| dt d\tau \\ \gamma_{ms} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k \Omega_{2k+1}^{(m)} \Omega_{2k+1}^{(s)}}{k+1/2}, \quad \delta_0 = 2, \quad \delta_s = 0 \quad (s \geq 1) \quad (2.9)$$

$$\Omega_{2k+1}^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{2k+1}(\xi_1 \eta_1 + \xi_2) T_k(\eta_1)}{\sqrt{1-\eta_1^2}} d\eta_1$$

Соотношения (2.3), (2.6) позволяют установить связь между основными величинами  $A_m$  и  $U_m^*$ , причем с помощью последних определяются все характеристики электроупругих полей. После необходимых вычислений получим

$$U_k^* = -\frac{4\pi V_0 (e_{31} + e_{15}) R_2^\infty + \varepsilon_0 R_1^\infty}{(2k+1)c_{11}\varepsilon_{33}L} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m \omega_{4k+2}^{(2m)} \quad (2.10)$$

где

$$\omega_{4k+2}^{(2m)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(\tau) T_{4k+2}(\sqrt{1-\tau^2} \sin(a/4))}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \quad (2.11)$$

Если использовать разложение полиномов Чебышева в ряд по степеням аргумента [8]

$$T_{4n+2}(\sqrt{1-\tau^2} \sin(a/4)) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k (\sqrt{1-\tau^2} \sin(a/4))^{2n+1-k}$$

и формулу бинорма Ньютона, то коэффициенты (2.11) можно представить в виде

$$\omega_{4n+2}^{(2m)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k \sum_{r=0}^{2n+1-k} (-1)^r \sin^{2r}(a/4) \frac{(2n+1-k)!}{(2n+1-k-r)!r!} \int_0^1 \frac{T_{2m}(\tau) \tau^{2r}}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \quad (2.12)$$

С учетом разложения [8]

$$x^m T_n(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!k!} T_{|n-m-2k|}(x) \quad (2.13)$$

и свойств ортогональности полиномов Чебышева окончательно найдем

$$\omega_{4n+2}^{(2m)} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k \sum_{r=0}^{2n+1-k} (-1)^r \sin^{2r}(a/4) \frac{(2n+1-k)! 2^{-2r}}{(2n-r-k+1)!r!} \sum_{i=0}^{2r} \frac{(2r)! \delta_{2r+2m-2i}^0}{(2r-i)!i!} \quad (2.14)$$

Поступая аналогично, получим

$$\Omega_{4n+2}^{(s)} = \sum_{r=0}^n a_r \sum_{k=0}^{2n+1-2r} \xi_1^k \xi_2^{2n-2r-k+1} \frac{(2n+1-2r)! 2^{1-k}}{(2n-2r-k+1)!} \sum_{i=0}^{2r} \frac{k! \delta_{2n-k-2i}^0}{(k-i)!i!} \quad (2.15)$$

$$\alpha_{ms} = (\ln 4 - \ln \rho) \delta_{ms}^0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{ms}^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \\ \times \sum_{i=0}^n \frac{(n-k)! 2^{k-n} \delta_{m+n-k-2i}^0}{(n-k-i)!i!} \sum_{j=0}^k \frac{k! 2^{-2} \delta_{j+k-2i}^0}{(k-j)!j!}, \quad \rho = \operatorname{tg}^2(\pi a/4L) \quad (2.16)$$

Для плотности скачка зарядов на электродах получим формулу

$$q(x) = \frac{\pi V_0 \varepsilon_{33}}{L} \frac{R_2^\infty + \varepsilon_0 R_1^\infty}{R_1^\infty} \frac{\cos(x/4)}{\sqrt{\sin^2(a/4) - \sin^2(x/4)}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m T_{2m}(\tau) \quad (2.17)$$

с помощью которой определим коэффициент интенсивности плотности зарядов, введенный в [9]

$$K_q(a) = N_q \operatorname{ctg}(a/4) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m = N_q \bar{K}_q, \quad N_q = \frac{2\pi V_0 \varepsilon_{33}}{L^{1/2}} \frac{R_2^\infty + \varepsilon_0 R_1^\infty}{R_1^\infty} \quad (2.18)$$

Можно показать, что коэффициент интенсивности напряжения  $\sigma_{11}$  вычисляется по формуле

$$K_q(a) = (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}) \frac{2\pi V_0 R_1^\infty}{L^{1/2} \varepsilon_{11} R_1^\infty} \bar{K}_q(a)$$

Интегрирование соотношения (2.17) позволяет определить суммарный заряд электрода

$$S_q^\infty(t) = C \exp(-i\omega t), \quad C = 8V_0 \varepsilon_{33} A_0 (R_2 + \varepsilon_0 R_1) / R_1 \quad (2.19)$$

и ток смещения

$$I(t) = YV_0 \exp(-i\omega t), \quad Y = -iC\omega \quad (2.20)$$

Так как ток пропорционален коэффициенту  $A_0$ , то условия  $l \rightarrow \infty$  и  $l \rightarrow 0$  могут быть использованы для определения резонансных и антирезонансных частот соответственно.

Компоненты вектора смещения и потенциал электрического поля определяются соотношениями

$$u(x, z) = -\Gamma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \alpha_{jn} \Delta_{jn} \exp[\lambda_{jn}(n+1/2)z] Q_n \sin(n+1/2)x$$

$$w(x, z) = -\Gamma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \beta_{jn} \Delta_{jn} \exp[\lambda_{jn}(n+1/2)z] Q_n \cos(n+1/2)x \quad (2.21)$$

$$\varphi(x, z) = 2\pi V_0 \frac{R_2^\infty + \varepsilon_0 R_1^\infty}{R_1^\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \gamma_{jn} \Delta_{jn} \exp[\lambda_{jn}(n+1/2)z] Q_n \cos(n+1/2)x$$

где

$$Q_n = \frac{\sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m A_m \omega_{4n+2}^{(2m)}}{(n+1/2)(R_{2n} + \varepsilon_0 R_{1n})}, \quad \Gamma_1 = \frac{2\pi V_0 (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13})}{L \varepsilon_{11}} \frac{R_2^\infty + \varepsilon_0 R_1^\infty}{R_1^\infty} \quad (2.22)$$

Из (2.21), (2.22) следует, что амплитуды полей неограниченно возрастают, если параметр  $v_n$  удовлетворяет уравнению

$$R_{2n} + \varepsilon_0 R_{1n} = 0 \quad (2.23)$$

которое совпадает с соответствующим уравнением работы [1], имеющим корень  $v_R$ , определяющий скорость распространения волны Релея в пьезополупространстве. Учитывая выражение для  $v_n$ , для частоты резонанса будем иметь

$$\omega_n = v_R \pi V_1 (2n+1) / 2L \quad (2.24)$$

В таблице приведены значения корня для некоторых пьезоэлектриков с учетом и без учета пьезоэлектрических свойств.

В заключение отметим, что определяющее интегральное уравнение Фредгольма первого рода (2.4)–(2.5), ядро которого представлено суммой его главной части в виде симметричной логарифмической функции и регулярного составляющего, принадлежит к классу хорошо исследованных интегральных уравнений. Регулярность эквивалентной ему бесконечной

системы линейных алгебраических уравнений (2.8) – (2.9) устанавливается известными методами, развитыми в [6, 10-13]. При определенной зависимости между характерными параметрами бесконечная система (2.8) – (2.9) оказывается вполне регулярной, а при других – квазиполностью регулярной. Тогда к системе (2.8) – (2.9) применим метод редукции или метод последовательных приближений, чем и исчерпывается вопрос ее разрешимости.

Таблица

корень	материал	ZnO	CdS	PZT-4	ЦТС-19
$v_R, e_y \neq 0$		0,4088	0,3990	0,4308	0,4064
$v_R, e_y = 0$		0,4230	0,3933	–	–

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сенник Н.А. Волны Релея в пьезоэлектрическом полупространстве с парой поверхностных электродов // Изв. РАН, МГТ, 1992, №4, с.106-115.
2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах: Применение для обработки сигналов. – М.: Наука, 1982. 424с.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. 471 с.
4. Kudriavtsev V.A., Parton V.Z., Senik N.A. Applied Mechanics. Soviet Reviews. Electromagnetoelasticity, vol.2, Hemisphere Publ.Corp., 1989. 230 p.
5. Бабешко В.А., Финкельштейн А.Б. Колебания электроупругих тел с периодической решеткой на поверхности. III Всес. симпозиум "Теоретические вопросы магнитоупругости". – Тезисы докл., Ереван (Цахкадзор), 17 – 21 сент. 1984. Ереван, Ереванск. ун-т, 1984, с.17-18.
6. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. 336 с.
7. Кокунов В.А., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А. Плоская задача электроупругости для пьезоэлектрического слоя с периодической системой электродов на поверхностях. – ПММ, 1985, т.49, №3, с.489-491.
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. 608 с.
9. Партон В.З., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А. Об одном критерии электрического разрушения диэлектриков в сильно неоднородных полях. – Докл. АН СССР, 1988, 298, №3, с.611-615.
10. Морарь Г.А., Полов Г.Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. – ПММ, 1971, т.35, №1, с.172-178.
11. Arutunyan N.K., Mkhitarian S.M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. – Trends in elasticity and thermoelasticity. Groningen: 1971, p. 3-20.
12. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. – ПММ, 1972, т.36, №5, с.770-787.
13. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. 488 с.

Афинский национальный технический университет, Греция

Поступила в редакцию  
20.04.1999