

ИЗГИБ ПРЯМОЛИНЕЙНО – АНИЗОТРОПНОЙ  
 ПЛАСТИНКИ В ВИДЕ НЕПОЛНОГО  
 ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

Այրապետյան Վ.Ջ.

Վ.Ճ Հայրապետյան

Արտակենտրոն կիսադական ռոդազծային անիզոտրոպ սալի ծոռուր

Դիտարկված են արտակենտրոն կիսադական բարակ սալերի ծոռան խնդիրները, որոնց նյութը օժտված է ռոդազծային օրթոտրոպիայով: Երկրեն կոորդինատային համակարգում ստացված են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումը և եզրային պայմանները: Դիտարկված եզրային խնդիրը լուծված է փոքր ֆիզիկական պարամետրի մեթոդով: Կոնկրետ օրինակում բերված են եզրազծով ամրակցված լուսնակաձև ռոդազծային օրթոտրոպ սալի ծոռան խնդրի լուծումները:

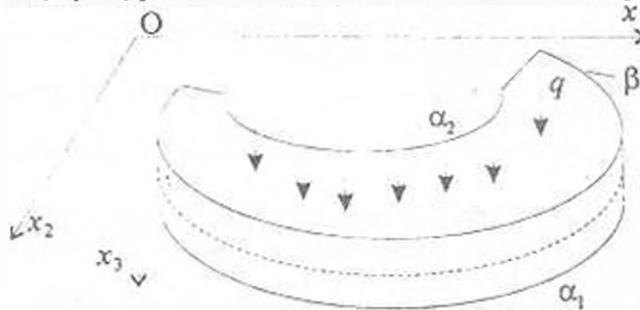
V.J. Hayrapetyan

Bending of Rectilinear Anisotropic Plate in the Form of Excentric Non-whole Ring

В предлагаемой работе рассматриваются задачи изгиба тонких анизотропных пластин в виде неполного эксцентрического кольца, материалы которых обладают прямолинейной ортотропией. Для исследования рассматриваемой задачи получены дифференциальные уравнения и необходимые величины в биполярной системе координат. Предложен метод решения рассматриваемой краевой задачи. Для конкретного примера приведены решения задачи изгиба прямолинейной ортотропной пластины в виде луночки с закрепленным контуром.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим упругую однородную анизотропную пластинку постоянной толщины  $h$ , имеющую форму неполного эксцентрического кольца, ограниченного окружностями  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$ , которая деформируется под действием изгибающей нагрузки  $q$  (фиг. 1).



Фиг. 1

Предположим, что пластинка является ортотропной, т.е. имеет в каждой точке три плоскости упругой симметрии. Далее примем срединную плоскость недеформированной пластинки за плоскость  $x_1x_2$ , поместив начало координат в произвольной

точке и направив ось  $x_3$  в сторону ненагруженной внешней поверхности.

В этом случае изгибающие, скручивающие моменты, перерезывающие силы и компоненты тензора напряжений определяются через функцию прогиба  $W(x_1, x_2)$ , которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [1], [2]:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} = q \quad (1.1)$$

причем  $D_1 > 0, D_2 > 0$ .

Граничные условия в случае, когда край пластинки жестко заделан (защемлен), будут [2,3].

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad (1.2)$$

Таким образом, задача об упругом равновесии пластинки, изгибающейся под действием перпендикулярных к ее плоскости сил, сводится к решению дифференциального уравнения с частными производными (1.1) при граничных условиях (1.2).

2. Метод решения задачи изгиба пластинки в виде неполного эксцентрического кольца, обладающего прямолинейной ортотропией.

Для решения поставленной задачи удобно представить дифференциальное уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) в биполярной координатной системе.

После ряда преобразований, дифференциальное уравнение (1.1) примет вид:

$$e\Lambda[\Phi] + \delta S[\Phi] = \tilde{q} \quad (2.1)$$

Здесь для операторов  $\Lambda[ ]$  и  $S[ ]$  приняты следующие обозначения:

$$\Lambda[ ] = \left( \frac{\text{ch}\alpha + \cos\beta}{a} \right)^4 \left[ \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{4\text{sh}\alpha}{\text{ch}\alpha + \cos\beta} \left( \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right) - \frac{4\sin\beta}{\text{ch}\alpha + \cos\beta} \left( \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right) + \frac{2(\text{ch}2\alpha - \cos 2\beta)}{(\text{ch}\alpha + \cos\beta)^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right] \quad (2.2)$$

$$S[ ] = B_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + B_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_3 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + B_4 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + B_5 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2} + B_6 \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta} + B_7 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + B_8 \frac{\partial^3}{\partial \alpha} + B_9 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \dots + B_{12} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \quad (2.3)$$

где

$$\tilde{q} = \frac{1}{D_1 + D_2} q \left( \frac{a\text{sh}\alpha}{\text{ch}\alpha + \cos\beta}, \frac{a\sin\beta}{\text{ch}\alpha + \cos\beta} \right) \quad (2.4)$$

$$\delta = \frac{D_1 - D_2}{D_1 + D_2}, \quad \delta k = \frac{2(D_1 - D_2)}{D_1 + D_2}, \quad e = \frac{D_1}{D_1 + D_2} \quad (2.5)$$

$$B_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{64a^4} \{ 9 - 17k - 12\cos 2\beta + 16k\cos 2\beta + 3\cos 4\beta + k\cos 4\beta - 8k(\cos\beta - \cos 3\beta)\text{ch}\alpha - 4\{3 - 4k + 4(-1 + k)\cos 2\beta + \cos 4\beta\}\text{ch}2\alpha + 8k\cos\beta\text{ch}3\alpha - 8k\cos 3\beta\text{ch}3\alpha + 3\text{ch}4\alpha + k\text{ch}4\alpha - 4\cos 2\beta\text{ch}4\alpha + \cos 4\beta\text{ch}4\alpha - k\cos 4\beta\text{ch}4\alpha \}$$

а функции  $B_i$ ,  $i=2,3,\dots,14$  имеют аналогичный вид, и для краткости их выражение не приводится.

Предположим, что  $D_1 > D_2$ . Тогда очевидно, что  $\delta$ , заданное выражением (2.5), будет малым физическим параметром ( $0 < \delta < 1$ ).

Из уравнения (2.1) видно, что это — дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами с неразделяющимися переменными, содержащее малый параметр.

Чтобы преобразовать дифференциальное уравнение (2.1) в более удобный вид, вместо неизвестной функции  $\Phi(\alpha, \beta)$  введем новую функцию  $\psi(\alpha, \beta)$  так [4]

$$\psi(\alpha, \beta) = \frac{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}{a} \Phi(\alpha, \beta) \quad (2.6)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2.1) после ряда нетривиальных преобразований можно представить так:

$$eT[\psi] + \delta H[\psi] = \tilde{q} \quad (2.7)$$

где для операторов  $T[\ ]$  и  $H[\ ]$  приняты

$$T[\ ] = \left( \frac{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}{a} \right)^3 \left[ \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \quad (2.8)$$

$$H[\ ] = A_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + A_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + A_3 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + A_4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + A_5 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + A_6 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + A_7 \frac{\partial}{\partial \alpha} + A_8 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \dots + A_{14} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + A_{15} \quad (2.9)$$

где

$$A_i[\alpha, \beta] = \{9 - 17k - 12\cos 2\beta + 16k\cos 2\beta + 3\cos 4\beta + k\cos 4\beta - 8k(\cos\beta - \cos 3\beta) \operatorname{ch}\alpha - 4[3 - 4k + 4(-1+k)\cos 2\beta + \cos 4\beta] \operatorname{ch} 2\alpha + 8k\cos\beta \operatorname{ch} 3\alpha - 8k\cos 3\beta \operatorname{ch} 3\alpha + 3\operatorname{ch} 4\alpha + k\operatorname{ch} 4\alpha - 4\cos 2\beta \operatorname{ch} 4\alpha + \cos 4\beta \operatorname{ch} 4\alpha k \cos 4\beta \operatorname{ch} 4\alpha\} / [64a(\cos\beta + \operatorname{ch}\alpha)]$$

а функции  $A_i$ ,  $i=2,3,\dots,15$  имеют аналогичный вид.

Граничные условия (1.2) в случае, когда края пластинки закреплены, имеют вид:

$$\psi|_l = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta}|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \beta}|_{\beta=\beta_2} = 0 \quad (2.10)$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению краевой задачи (2.7), (2.10), т.е. к решению дифференциального уравнения в частных производных с переменными коэффициентами с неразделяющимися переменными (2.7) с граничными условиями (2.10).

Решение дифференциального уравнения (2.7) представим в виде ряда по степеням  $\delta$ :

$$\psi(\alpha, \beta) = \psi_0(\alpha, \beta) + \delta \psi_1(\alpha, \beta) + \delta^2 \psi_2(\alpha, \beta) + \dots \quad (2.11)$$

Тогда для определения  $\psi_j(\alpha, \beta)$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) имеем следующие системы рекуррентных уравнений:

$$eT[\psi_j] = q_j, \quad (j=0,1,\dots) \quad (2.12)$$

где

$$q_0 = \bar{q} \quad (2.13)$$

$$q_i = -H[\psi_{i-1}], \quad (i \geq 1) \quad (2.14)$$

Граничные условия (2.10) с учетом (2.11) будут:

$$\psi_j|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial \beta}|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \beta}|_{\beta=\beta_2} = 0, \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Итак, задача изгиба прямолинейной ортотропной пластинки в виде неполного эксцентрического кольца с закрепленными краями сводится к решению системы рекуррентных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами (2.12) при граничных условиях (2.15).

### 3. Решение задачи изгиба ортотропной луночной пластинки с закрепленным контуром.

Рассмотрим ортотропную упругую тонкую пластинку, имеющую форму круговой луночки, подверженную действию распределенной поперечной нагрузки  $q(\alpha, \beta)$ . В этом случае граничные условия (2.15) сокращаются:

$$\psi_j|_{\beta=\beta_1} = \psi_j|_{\beta=\beta_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial \beta}|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \beta}|_{\beta=\beta_2} = 0 \quad (3.1)$$

Решение уравнения (2.12) при  $j=0$  в соответствии [4] можно представить так:

$$\psi_0 = (\alpha, \beta) = \int_0^{\pi} [f_{c0}(\beta, m) \cos m\alpha + f_{s0}(\beta, m) \sin m\alpha] dm \quad (3.2)$$

Для функции  $f_{c0}(\beta, m)$  [равным образом, для функции  $f_{s0}(\beta, m)$ ] имеем:

$$f_{c0}(\beta, m) = A_0(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + B_0 \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + C_0(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta + D_0 \operatorname{sh} m\beta \sin \beta + \tilde{f}_{c0}(\beta, m) \quad (3.3)$$

Здесь  $\tilde{f}_0(\beta, m)$  — частное решение следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 f_0}{\partial \beta^4} + 2(1-m)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \beta^2} + (1+m)^2 f_0 = P_0(\beta, m) \quad (3.4)$$

где

$$P_{c0}(\beta, m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{q_0(\alpha, \beta)}{eg^3} \cos m\alpha d\alpha \quad (3.5)$$

$$P_{s0}(\beta, m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{q_0(\alpha, \beta)}{eg^3} \sin m\alpha d\alpha, \quad \left( g = \frac{\operatorname{ch}\alpha + \cos \beta}{a} \right) \quad (3.6)$$

Решение уравнения (2.12), при  $j \geq 1$  также представим:

$$\psi_j = (\alpha, \beta) = \int_0^{\pi} [f_{cj}(\beta, n) \cos n\alpha + f_{sj}(\beta, n) \sin n\alpha] dn \quad (3.7)$$

Для функции  $f_{cj}(\beta, n)$  [равным образом, для функции  $f_{sj}(\beta, n)$ ] имеем:

$$f_0(\beta, n) = A_1(n) \operatorname{ch} n \beta \cos \beta + B_1 \operatorname{ch} n \beta \sin \beta + C_1(n) \operatorname{sh} n \beta \cos \beta + D_1 \operatorname{sh} n \beta \sin \beta + \bar{f}_0(\beta, n). \quad (3.8)$$

Здесь  $\bar{f}_0(\beta, n)$  - частное решение следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 \bar{f}_0}{\partial \beta^4} + 2(1-n)^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_0}{\partial \beta^2} + (1+n)^2 \bar{f}_0 = P_0(\beta, n) \quad (3.9)$$

где

$$P_0(\beta, n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_0(\alpha, \beta)}{e g^3} \cos n \alpha d\alpha \quad (3.10)$$

$$P_0(\beta, n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_0(\alpha, \beta)}{e g^3} \sin n \alpha d\alpha \quad (3.11)$$

В табл. 1-2 приведены максимальные значения прогибов, вычисленные по двум приближениям для различных пластин  $\left(\beta_1 = -\frac{\pi}{4}, \beta_2 = \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\left(\beta_1 = -\frac{\pi}{2}, \beta_2 = \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\left(\beta_1 = -\frac{2\pi}{3}, \beta_2 = \frac{2\pi}{3}\right)$  (фиг.2.4.6), причем  $D_1/D_2 = 1.25$ ,  $D_3 = 6D_1$  и при нормальных нагрузках ( $q = \text{const}$ ,  $q(\alpha, \beta) = (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)$  МПа).

В табл. 1 приведены результаты первого приближения, совпадающие с результатами соответствующей изотропной пластинки. Второе приближение дается в табл. 2, откуда видно, что поправка анизотропии составляет 10%.

На фиг. 3.5,7 изображены конфигурации срединной поверхности деформированной пластинки.

Значения  $\frac{1}{a} W^{(0)}_{\max}$

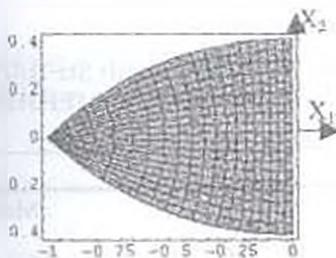
Таблица 1

$q$ МПа	$\beta_1, \beta_2$	$\beta_1 = -\frac{\pi}{4}$ $\beta_2 = \frac{\pi}{4}$	$\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$ $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$	$\beta_1 = -\frac{2\pi}{3}$ $\beta_2 = \frac{2\pi}{3}$
$q(\alpha, \beta) = \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta$		0.0016884	0.019867	0.043606
$q = \text{const}$ ,		0.001956	0.031716	0.105386

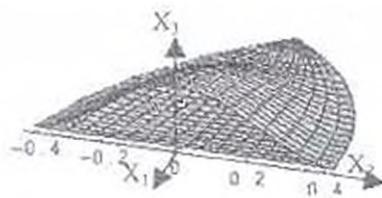
Значения  $\frac{1}{a} [W^{(0)}_{\max} + \delta W^{(1)}_{\max}]$

Таблица 2

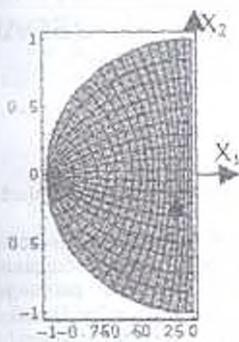
$q$ МПа	$\beta_1, \beta_2$	$\beta_1 = -\frac{\pi}{4}$ $\beta_2 = \frac{\pi}{4}$	$\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$ $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$	$\beta_1 = -\frac{2\pi}{3}$ $\beta_2 = \frac{2\pi}{3}$
$q(\alpha, \beta) = \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta$		0.001536	0.01808	0.03968
$q = \text{const}$ ,		0.001780	0.02886	0.09590



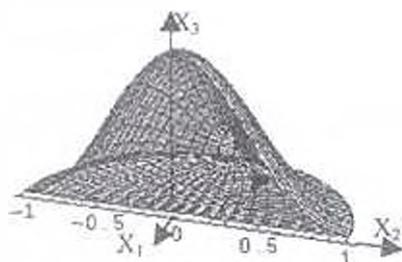
Фиг. 2



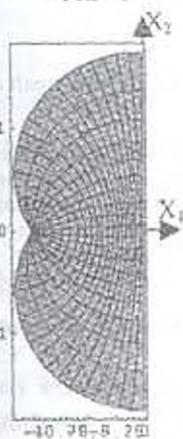
Фиг. 3



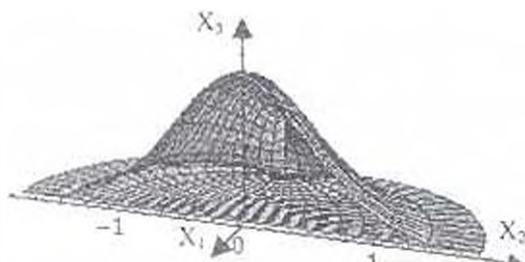
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
2. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд. ЕГУ, 1976, Ереван.
3. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. Ереванского университета, 1997, 241с.
4. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1950, 232с.

Гаварский госуниверситет  
Армении

Поступила в редакцию  
22.06.1999