

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА ИЛИ ВДУВА

Бабаджанян Г.А.

Գ.Հ. Բաբաջանյան

Հեղուկի շարժումը խողովակում արտափողի կամ ներհոսքի առկայությամբ

Աշխատանքում քննարկվում է մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար շարժումը պահած, խողովակում, որի ծակոտեղեն մակերևույթի երկարությամբ տեղի ունի հեղուկի արտափող կամ ներհոսք էնդոթրը լուծվում է Լապլասի ինտեգրալ ճեփոխության օգնությամբ։ Որոշվում են առանցքային և ուսլիակ արագությունները, ճնշումը և շփման ուժը հեղուկի շերտերի միջև և խողովակի պատի վրա։ Լուծված է քվային օրինակ և կառուցված են համապատասխան գրաֆիկներ։

G.H. Babajanyan

Fluid motion in pipe with inleakage or outflow of liquid

Рассматривается ламинарное, стационарное изотермическое движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе с постоянным по длине отсосом или вдувом. Определены законы изменения осевой и радиальной скоростей, давления, сил трения между слоями жидкости и на стенке трубы.

Ввиду многочисленных технических приложений (течение грунтовых вод, движение жидкости в тканевых шлангах, во внутренних каналах пороховых зарядов и т.д.) исследование закономерностей течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах с отсосом или вдувом через пористые стенки представляют несомненный интерес [1–3].

1. Пусть в круглой неограниченной в одном направлении, трубе радиуса a поступающая жидкость имеет равномерно распределенные и постоянные по входному сечению скорость U и давление P_0 . Действие массовых сил не учитывается. В качестве исходных используем приближенные уравнения движения жидкости, записанные в цилиндрических координатах [4]:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где V_z и V_r — осевая и радиальная компоненты скорости, p — давление; ρ — плотность, а ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют следующий вид.

$$z = 0, \quad V_z = U, \quad p = p_0 \quad (1.2)$$

$$z > 0, \quad r = a, \quad V_z = 0, \quad V_r = \pm V_0 = \text{const}$$

$$z > 0, \quad r = 0, \quad V_r = 0$$

Здесь a — радиус трубы; знак "+" перед V_0 соответствует отсосу, а "—" — вдуву жидкости через пористую поверхность трубы. С помощью безразмерных переменных

$x = z/a$, $y = r/a$, $u = (V_z - U)/U$, $V = V_r/U$, $P = (p - p_n)/\rho U^2$ система уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = R_c \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (yV) = 0$$

$$x = 0, \quad u = 0, \quad P = 0$$

$$x > 0, \quad y = 1, \quad u = -1, \quad V = \pm V_0/U$$

$$x > 0, \quad y = 0, \quad V = 0 \quad (1.4)$$

где $R_c = Ua/\nu$ — число Рейнольдса.

2. Для нахождения решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа. Применяя прямое и обратное преобразования Лапласа по переменной x к системе уравнений (1.3) и к граничным условиям (1.4), и переходя к первоначальным переменным для искомых функций $p(z)$, $v_z(z, r)$ и $v_r(z, r)$ получим:

$$p(z) = p_n - \rho U^2 \left[\frac{8z}{R_c a} + \frac{1}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\gamma_n^2 \frac{z}{R_c a} \right) / \gamma_n^2 \right] \pm$$

$$\pm 2\rho V_0 U \left[\frac{4z}{3a} + \frac{4z^2}{R_c a^2} - \frac{R_c}{144} + 4R_c \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\gamma_n^2 \frac{z}{R_c a} \right) / \gamma_n^2 \right] \quad (2.1)$$

$$v_z = 2U \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \pm V_0 \left(\frac{4zr^2}{a^2} + \frac{R_c z^2}{4a^2} - \frac{R_c z^2}{3a^2} - \frac{4z}{a} + \frac{R_c}{12} \right) +$$

$$+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp \left(-\gamma_n^2 \frac{z}{R_c a} \right) / \gamma_n^2 \right] \times \left[\frac{J_0(\gamma_n r/a)}{J_0(\gamma_n)} - 1 \right] \times \left(U \pm \frac{2V_0 R_c}{\gamma_n^2} \right) \quad (2.2)$$

$$v_r = \pm \frac{V_0 r}{a} \left(2 - \frac{r^2}{a^2} \right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\gamma_n^2 \frac{z}{R_c a} \right) \times$$

$$\times \left[\frac{J_1(\gamma_n r/a)}{\gamma_n J_0(\gamma_n)} - \frac{r}{2a} \right] \times \left(\frac{U}{R_c} \pm \frac{2V_0}{\gamma_n^2} \right) \quad (2.3)$$

Сила трения определяется по формуле:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{4\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{\gamma_n^2 z}{R_c a} \right) \frac{J_1(\gamma_n r/a)}{\gamma_n J_0(\gamma_n)} \left[U \pm \frac{2V_0 R_c}{\gamma_n^2} \right]$$

$$= \frac{\mu V_0 r}{a^2} \left(\frac{8z}{a} + \frac{R_e r^2}{a^2} - \frac{2R_e}{3} \right) - \frac{4U\mu r}{a^2} - \frac{4\mu}{aR_e} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 z}{R_e a}\right) \left[\frac{J_1(\gamma_n r/a)}{\gamma_n J_0(\gamma_n)} - \frac{r}{2a} \right] \left[\frac{U\gamma_n^2}{R_e} \pm 2V_0 \right] \quad (2.4)$$

На поверхности трубы сила трения примет вид

$$\tau_{r=a} = -\frac{4\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{\gamma_n^2 z}{R_e a}\right) / \gamma_n \right] \frac{J_1(\gamma_n)}{J_0(\gamma_n)} \left(U \pm \frac{2V_0 R_e}{\gamma_n^2} \right) \pm \frac{\mu V_0}{a} \left(\frac{8z}{a} + \frac{R_e}{3} \right) - \frac{4U\mu}{a} - \frac{4\mu}{aR_e} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 z}{R_e a}\right) \left[\frac{J_1(\gamma_n)}{\gamma_n J_0(\gamma_n)} - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{U\gamma_n^2}{R_e} \pm 2V_0 \right) \quad (2.5)$$

Здесь μ — динамический коэффициент вязкости; J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, соответственно. Величины $\gamma_n = -i\sqrt{R_e} s_n$ являются действительными корнями функции Бесселя первого рода второго порядка $J_2(\gamma_n)$. Формулы (2.1) — (2.5) определяют законы изменения характерных величин потока жидкости в цилиндрической пористой трубе. Полученные формулы при отсутствии отсоса (вдува) совпадают с результатами работ [4,5]. Отметим, что факт удовлетворения полученных формул граничным условиям подтверждает равномерную сходимость входящих в них рядов.

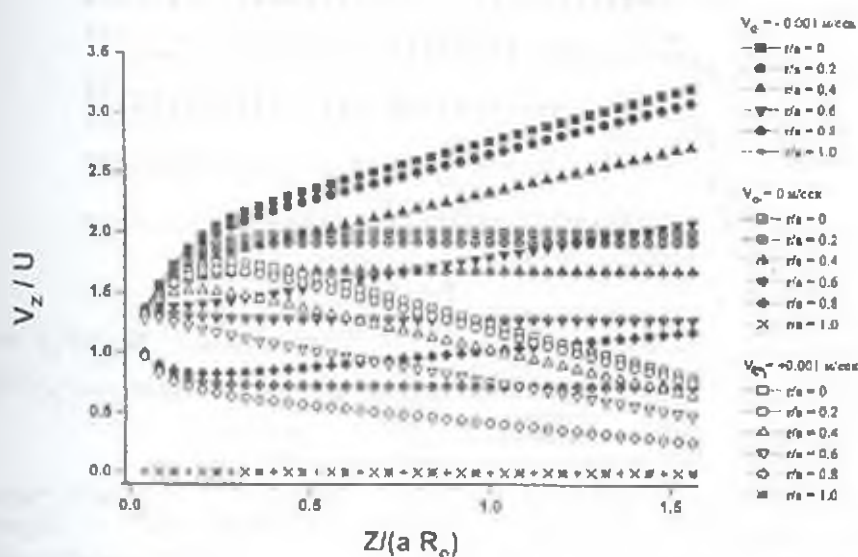
С целью получения наглядной картины развития течения жидкости в цилиндрической трубе с отсосом или вдувом, проведены численные (компьютерные) расчеты со следующими значениями входящих параметров: $U = 10^{-1}$ м·сек⁻¹; $V_0 = 10^{-3}$ м·сек⁻¹; $p_n = 10^{-2}$ кг·м⁻²; $\rho = 102$ кг·сек⁻¹·м⁻³; $\mu = 10^{-1}$ кг·сек·м⁻²; $R_e = 50$; $v = 10^{-1}$ м²·сек⁻¹; $a = 0.05$ м. На фиг.1, 2 и 3 представлены результаты расчетов для зависимостей продольной скорости, давления и силы трения, выраженных в безразмерных единицах (V_z/U) , (p/p_n) , $(\tau a/\mu U)$ соответственно, от продольной координаты (в единицах z/aR_e) в различных сечениях трубы (значения r/a). Анализ приведенных кривых показывает, что:

а) резкие изменения поведения продольной скорости (фиг.1) происходят на начальном участке (до $\sim 0.4z/aR_e$) трубы. Далее имеет место монотонное поведение: увеличение скорости при вдуве, уменьшение — при отсосе и постоянное — в случае сплошной стенки;

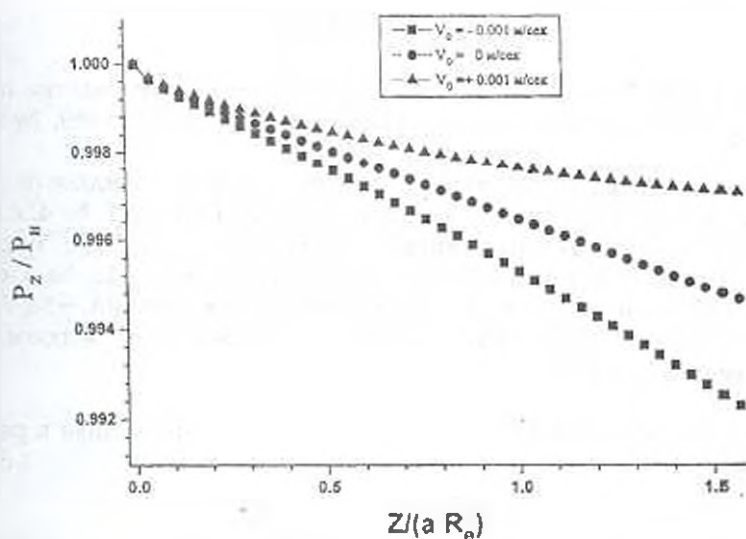
б) монотонное уменьшение давления во всех поперечных сечениях трубы с соблюдением неравенств $p_{\text{отсос}} > p_{\text{сплош}} > p_{\text{вдув}}$ (фиг.2);

в) наиболее интересны результаты, полученные для силы трения (фиг.3). Как и для продольной скорости, резкие изменения в величине и характере поведения силы трения имеют место на начальном участке (до $\sim 0.2z/aR_e$). При этом образуется пограничный слой жидкости в трубе (между продольными сечениями с $r/a = 0.8$ и $r/a = 0.6$), разделяющий поток на две части, в которых законы изменения силы трения прямо противоположны. Интересно также, что во всех сечениях вдоль длины трубы сила трения подчиняется следующей закономерности:

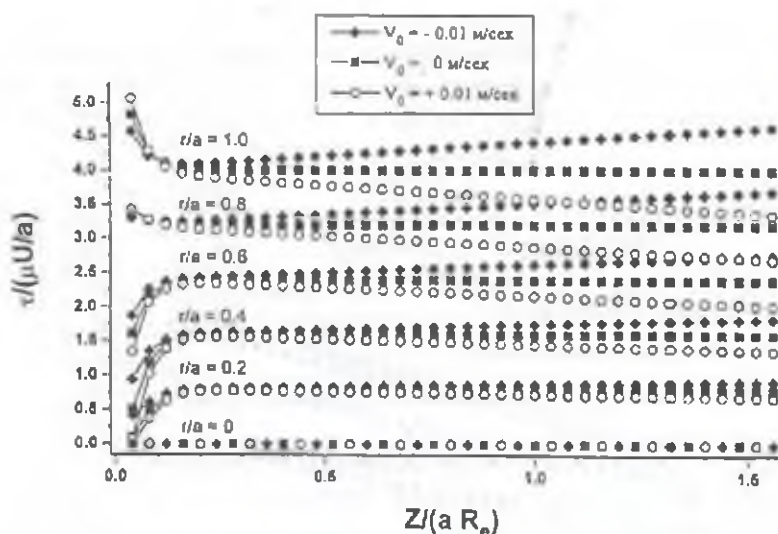
$\tau_{\text{вдув}} > \tau_{\text{сплош}} > \tau_{\text{отсос}}$. Причем, как следует из величин углов наклона кривых на фиг.3, скорость изменения силы трения (возрастание — при вдуве и убывание — при отсосе) явно зависит от радиальной координаты, увеличиваясь от нуля в центре трубы до максимального значения на стенке.



Фиг.1 Зависимость продольной скорости (в безразмерных единицах V_z/U) течения вязкой жидкости в трубе от продольной координаты (в безразмерных единицах z/aR_c) в различных радиальных плоскостях (заданных в единицах r/a).



Фиг.2 Зависимость давления (в безразмерных единицах P/P_H) жидкости в трубе от продольной координаты (в безразмерных единицах z/aR_c).



Фиг.3 Зависимость силы трения [в безразмерных единицах $\tau/(\mu U)$] вязкой жидкости в трубе от продольной координаты (в безразмерных единицах z/aR_e) в различных радиальных плоскостях (заданных в единицах r/a).

Таким образом, развитый в работе подход для изучения течения вязкой жидкости в трубах как со сплошной, так и пористой поверхностями, позволяет получать в достаточном объеме информацию о характере течения на достаточно протяженном участке трубы (как начальном, так и стабилизированном).

Работа выполнена в рамках научной темы № 94-670, финансируемой государственными источниками Республики Армения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варпаев В.Н. Течение вязкой жидкости в начальном участке плоского канала с пористыми стенками. — Изв.АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, с.178-181.
2. Слезкин Н.А. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками. — ПММ, 1957, т.21, № 4, с.591-593.
3. Бабаджанян Г.А. Течение вязкой жидкости в трубе с пористыми стенками. — Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат.н., 1965, т.18, № 4, с.73-79.
4. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.-Л.: 1951.
5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Гостехтеориздат, 1955.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
6.05.1999