

УДК 539.6

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ
СКОРОСТЬЮ ПО ГРАНИЦЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ,
ЧАСТЬ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ ТВЕРДЫМ ПОКРЫТИЕМ**

Асрян Н. Г., Багдоев А. Г.

Ն.Գ. Ասրյան, Ա.Գ. Բագդոև

Սեղմելի հեղուկով գրադեպրած կիսահարթության պինդ եզրով կամայական արագությամբ տարածվող ճակատի ճնշման խնդրի լուծումը

Դիսսերվում է իդեալական սեղմելի հեղուկով գրադեպրած և սառցե ծածկույթով կիսահարթության մերթիև արագ քափանցող ճնշման որոշման խնդիրը

Ենթան ճակատի շարժման օրենքը մակերևութով կամայական է, Խառը եզրային սալմաններով այդ խնդրի լուծումը տրվում է հիմնվելով այն մեթոդների վրա, որոնք զարգացված են վերջավոր (քափով) քիչ և անսահման միացվարում ճարտի տեսություններում:

N.G. Asryan, A.G. Bagdoyev

The solution of problem on pressure front propagating along rigid boundary of halfplane, occupied by compressive fluid

Рассматривается задача проникновения давления в глубь сжимаемой идеальной жидкости, занимающей нижнюю полуплоскость с ледяным покрытием.

Закон движения фронта давления по поверхности произвольный. Решение задачи со смешанными граничными условиями производится методами, развитыми в теории крыла конечного размаха и теории трещин в упругой среде. Получено значение нормальной скорости частиц жидкости под фронтом давления и потенциала (давления) вне его.

1. Общее решение задачи

Рассматривается задача о проникании давления в глубь сжимаемой идеальной жидкости, занимающей полуплоскость.

Выберем ось x по поверхности невозмущенной среды, ось y направим перпендикулярно вниз. Жидкость покрыта тонким слоем льда.

При распространении фронта давления по поверхности лед разрушается. Таким образом, имеем следующую граничную задачу:

$$\text{При } y=0, x < l(t), P = P_1(x, t), \text{ при } x > l(t), v = 0,$$

где P - давление, v - нормальная скорость жидкости к поверхности $y = 0$, $x = l(t)$ - закон распространения координаты граничного давления.

Отметим, что в данной статье рассмотрена задача для жидкости, покрытой слоем льда. То же решение годится и в случае, когда поверхность жидкости покрыта тонким слоем любого хрупкого материала. Вместе с тем, повидимому, случай ледяного покрытия является наиболее важным с практической точки зрения.

Рассматриваемая задача актуальна, поскольку в ней изучается влияние взрывной волны на подводные объекты, покрытые слоем льда.

Вводя потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ по формуле $P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, где ρ — плотность, можно, учитывая, что $\partial \varphi / \partial y = v$, записать граничное условие в виде $y = 0$

$$\varphi = \varphi_1(x, t) \text{ при } x < l(t), \quad \partial \varphi / \partial y = 0 \text{ при } x > l(t) \quad (1.1)$$

$$\varphi_1(x, t) = -\frac{1}{\rho} \int_{F(x)}^t P_1(x, t) dt, \quad t = F(x) \text{ есть функция, обратная к } x = l(t).$$

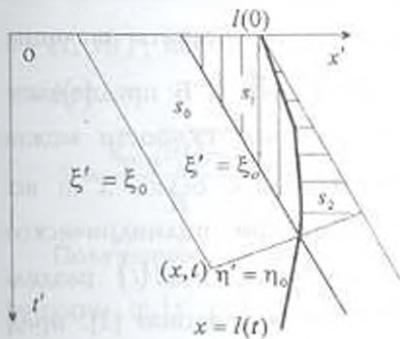
Для потенциала φ имеет место волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Введением функции $v = \partial \varphi / \partial y$, условия (1.1) с учетом (1.2) запишутся в виде $y = 0$

$$\partial v / \partial y = f(x, t) \text{ при } x < l(t), \quad v = 0 \text{ при } x > l(t) \quad (1.3)$$

где
$$f(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

и предположено, что $l(t) < c$

Таким образом, для функции v задача свелась к антиплоской задаче о гребине в изотропной упругой среде, распространяющейся с произвольной скоростью [1,2,3]. Решение уравнения (1.2), верного и для функции v , при граничных условиях (1.3) можно искать методом интегральных уравнений [3, 4, 5]

Согласно [3, 5] можно записать для

функции v интеграл Поссю на границе среды.

$$v = -\frac{c}{\pi} \iint \frac{(\partial v / \partial y)_{y=0}}{\sqrt{T}} dx dt, \quad T = c^2(t-t')^2 - (x-x')^2 \quad (1.5)$$

где согласно (1.3) при $x < l(t)$ $(\partial v / \partial y)_{y=0} = f(x, t)$, причем $f(x, t)$ дается (1.4). При этом, интегрирование согласно [5], где рассмотрена аналогичная задача о крыле в характеристических координатах

$$\xi = ct - x, \quad \eta = ct + x, \quad \xi_0 = ct - x, \quad \eta_0 = ct + x \quad (1.6)$$

должно вестись по заштрихованной области фиг. 1, в пределах $\xi_0 < \xi < \xi_0$, $-\xi < \eta < \eta_0$ причем ξ_0 соответствует точке $x = l(t_2)$, $t = t_2$ пересечения характеристики $\eta = \eta_0 = ct_2 + l(t_2)$ с

кривой $x = l(t)$

$$\xi_2 = ct_2 - l(t_2), \quad ct + x = ct_2 + l(t_2) \quad (1.7)$$

Тогда в характеристических координатах при $x < l(t)$ получится

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\xi}^{\xi_0} d\xi \int_{-\eta}^{\eta_0} f_1(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}} \quad (1.8)$$

причем $f_1(\xi, \eta) = f(x, t)$.

В задаче о штампе в переменных $\varphi, (\partial\varphi/\partial y)_{y=0}$ вместо $v, (\partial v/\partial y)_{y=0}$ формула (1.8) получена в [6].

Следует отметить, что приведенное ниже решение дается в предположении о дозвуковой скорости фронта давления, что может иметь место при взрыве на самой поверхности.

В случае взрыва в воздухе, вначале скорость ударной волны вдоль поверхности сверхзвуковая, а далее становится дозвуковой. Тогда на фиг. 1 следует участок оси x ($0 < x < l(0)$) заменить на сверхзвуковую часть кривой $x = l(t)$, что соответствует в задаче о крыле сверхзвуковой передней кромке [5]. Тогда все приведенные ниже формулы сохранятся, только в нижний предел интегралов по η следует ставить значения, соответствующие сверхзвуковой части кривой $x = l(t)$. В предположении малости времени достижения фронтом звуковой скорости можно считать сверхзвуковую часть кривой, совпадающей с осью x и все нижеприведенное сохраняет силу. Кроме того, при цилиндрическом взрыве в воздухе вообще говоря, имеются две точки $x = \pm l(t)$ раздела граничных условий. Как и в задаче о крыле [5] и трещине [3], предполагается, что рассматриваются моменты времени, для которых дозвуковые части кривой $x = l(t)$ фиг. 1 и соответствующей кривой $x = -l(t)$ взаимно не влияют, что соответствует области справа от характеристики $\xi = -l(0)$ для приведенной на фиг. 1 картины, описывающей правую часть диаграммы x, t , связанную с правым фронтом $x = l(t)$.

То, что интегрирование в (1.8) следует выбрать так, как сделано, следует из граничного условия $v = 0$ при $x > l(t)$, причем из (1.5) после замены $\tau = (\partial v/\partial y)_{y=0}$, получится

$$\int_{-\xi}^{\xi_0} \frac{\tau_1 d\eta}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)}} + \int_{-\eta}^{\eta_0} \frac{\tau_2 d\xi}{\sqrt{(\xi_0 - \xi)}} = 0, \quad \eta_1(\xi_0) = ct_2 + l(t_2)$$

Тогда, записывая интегралы в (1.5) по заштрихованной области, и областям S_1, S_2 (фиг. 1), можно видеть, что интегралы по S_1, S_2 сокращаются и получается (1.8). Тогда из (1.8) получится

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int_{l(t_2)-ct_2}^{ct-x} \int_{-\xi}^{\eta_0} f_1(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{(ct-x-\xi)(\eta_0-\eta)}} \quad (1.9)$$

2. Определение решения вблизи края фронта давления

Вблизи края фронта давления на границе $x \approx l(t)$ интегрирование по ξ ведется по узкой области, для которой $\xi = \xi_0$, причем

$$\xi_0 - \xi_0 = [l(t) - x] \frac{2}{1 + l(t)/c} \quad (2.1)$$

где точка означает дифференцирование по времени. Вычисляя интеграл по ξ в (1.9), где в $f_1(\xi, \eta)$ и в нижнем пределе интегрирования по η подставлено $\xi = \xi_0$, переходя к переменной интегрирования x для которой вдоль характеристики $\xi = \xi_0$, имеет место $d\eta = 2dx$, $\eta_0 - \eta = 2(x - x)$, учитывая что пределы интегрирования по x будут $x - ct, l(t)$, используя (2.1), можно получить под фронтом давления при $x = l(t)$

$$v = \frac{k_2 \sqrt{l(t) - x}}{\pi}, \quad k_2 = -\frac{2}{\sqrt{1 + l(t)/c}} \int_0^x \frac{f(x, t - l(t)/c + x/c)}{\sqrt{x - x}} dx \quad (2.2)$$

Полученное решение дает правильное поведение v только для функции $\varphi_1(x, t)$, гладкой в точке $x = l(t)$.

В случае разрывной по производной функции $\varphi_1(x, t)$ в точке $x = l(t)$ интеграл в (2.2) дает увеличение особенности при $x = l(t)$. При этом в (1.5) следует дважды проинтегрировать по частям интегралы по x, t , заменить производные по x, t от $\frac{1}{\sqrt{T}}$ через производные по x, t и учесть формулу

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T^{3/2}} \quad (2.3)$$

Тогда (1.5) можно записать в виде

$$v = -\frac{c}{\pi} \iint \varphi_1(x, t) \frac{dx dt}{T^{3/2}} \quad (2.4)$$

В характеристических координатах ξ, η получится, как и в (1.8), формула

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \int_{-\xi}^{\eta} \varphi_1(x', t') \frac{d\eta'}{(\xi_0 - \xi')^{1/2} (\eta_0 - \eta')^{1/2}} \quad (2.5)$$

Повторяя выкладки, сделанные при получении (2.2), используя (2.1), переходя от η к x , вычисляя конечную часть интеграла по ξ , можно получить при $x = l(t)$ соотношение:

$$v = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1+l(t)/c}}{\sqrt{l(t)-x}} \int_{x-ct}^x \varphi_1\left(x', t' - \frac{1}{c}x + \frac{1}{c}x'\right) \frac{dx'}{(x-x')^{3/2}} \quad (2.6)$$

В случае же непрерывной в точке $x = l(t)$, но имеющей излом, функции $\varphi_1(x, t)$, например,

$$\varphi_1(x, t) = B(x, t)\{l(t) - x\} \quad (2.7)$$

где $B\{l(t), t\} \neq 0$, а более конкретно, для случая разрывного давления на фронте $P = P_1 = \text{const}$, при котором

$$\varphi_1(x, t) = -\frac{1}{\rho} P_1 \{t - F(x)\} \quad (2.8)$$

интеграл в (2.6) в точке $x = l(t)$ дает с точностью до множителя $-\frac{1}{\rho\sqrt{c}} P_1$ при переходе от переменной интегрирования x к $t' = t + x/c - x'/c$

$$\int_0^t \frac{t' - F\{l(t) + ct' - ct\}}{(t-t')^{3/2}} dt' \quad (2.9)$$

Нижний предел не дает особенности, а при $t' = t$ подынтегральная функция в (2.9), с учетом того, что $F\{l(t)\} = t$, равна приближенно

$$\frac{t - t - F\{l(t)\}c(t-t)}{(t-t)^{3/2}} = -\frac{1 - cF(t)}{\sqrt{t-t}} \quad (2.10)$$

причем $F(t) = 1/l(t)$. Таким образом, для граничной функции $\varphi_1(x, t)$, обращаемой в нуль первого порядка при $x = l(t)$, интеграл в (2.6) для $x = l(t)$ имеет конечное значение, и имеет место известная из теории трещин [3] особенность функции v .

3. Определение потенциала вне фронта давления

Можно также получить значение $\varphi(x, t)$ при $x > l(t)$ на поверхности среды. Для этого следует применить метод сверток [2, 6].

Запишем

$$\varphi = \varphi_+(x, t) + \varphi_-(x, t), \quad v = v_+(x, t) + v_-(x, t)$$

где индекс "+" соответствует функциям, равным нулю при $x < l(t)$, а индекс "-" функциям, равным нулю при $x > l(t)$.

Вводя преобразование Лапласа по t , $\bar{\varphi}(x, y, s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(x, y, t) dt$,

полагая $\bar{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_1 x - \beta y} \varphi d\alpha_1$, и подставляя в (1.2), можно получить

$\beta = -i\sqrt{s^2/c^2 + \alpha_1^2}$. Вводя преобразования Лапласа и Фурье от функций φ и v на границе полуплоскости $y = 0$

$$\bar{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_1 x} \bar{\varphi}(x, 0, s) dx, \quad \bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_1 x} \bar{v}(x, 0, s) dx \quad (3.1)$$

используя равенство $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, можно получить для $\bar{\varphi}, \bar{v}$

$$\bar{\varphi} = \bar{S}(\alpha_1, s) \bar{v} \quad (3.2)$$

где $\bar{S} = -\frac{1}{\sqrt{s^2/c^2 + \alpha_1^2}}$ (3.3)

Записывая факторизацию функции $\bar{S} = \bar{S}_+ \bar{S}_-$, где [6]

$$\bar{S}_+ = \frac{1}{\sqrt{s/c - i\alpha_1}}, \quad \bar{S}_- = \frac{1}{\sqrt{s/c + i\alpha_1}} \quad (3.4)$$

вводя также функции $\bar{P}_\pm = 1/\bar{S}_\pm$, можно из (3.2), следуя [2, 6], получить

$$\bar{\varphi}_+ = \bar{S}_+ ** \{(\bar{S}_- ** \bar{v}_- - \bar{P}_+ ** \bar{\varphi}_-) H(x-l)\} \quad (3.5)$$

$$\bar{v}_- = -\bar{P}_- ** \{(\bar{S}_+ ** \bar{v}_+ - \bar{P}_- ** \bar{\varphi}_+) H(l-x)\} \quad (3.6)$$

где $H(x)$ есть единичная функция. Звездочки обозначают свертки по x, l . В силу того, что $v_+ = 0$, из (3.6) можно после некоторых преобразований получить значение v под фронтом давления, даваемое (1.5), (2.4). Из (3.5) получится при $x > l(t)$

$$\bar{\varphi}_+ = -\bar{S}_+ ** \{(\bar{P}_- ** \bar{\varphi}_+) H(x-l)\} \quad (3.7)$$

Функции S, P находятся из (3.4) применением обратных преобразований Лапласа и Фурье в виде [6]

$$S(t, x) = -\frac{H(x)\delta(t-x/c)}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}, \quad P_1(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\delta(t-x/c)\frac{H(x)}{x^{3/2}} \quad (3.8)$$

Для граничной функции, заданной в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{0_1} = -\delta(x-\xi)H(t-\tau) \quad (3.9)$$

можно получить для внутренней свертки в (3.7)

$$P_1 ** \varphi_{0_1} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{H(x-\xi)}{(x-\xi)^{3/2}}H\left(t-\tau-\frac{x}{c}+\frac{\xi}{c}\right) \quad (3.10)$$

Из (3.7) и (3.10) с учетом (3.8) после замены $x-x'-\xi=X$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{0_1} = & -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(x')}{X^{3/2}}\frac{H(x-X-\xi)}{\sqrt{x-X-\xi}}H\left(t-\tau-\frac{x}{c}+\frac{\xi}{c}\right) \times \\ & \times H\left\{X+\xi-l\left(t-\frac{x}{c}+\frac{\xi}{c}+\frac{X'}{c}\right)\right\}dX' \end{aligned} \quad (3.11)$$

Нижний предел интегрирования находится из условий

$$X+\xi-l(t_0)=0, \quad t_0=t-x/c+\xi/c+X'/c=t-x/c+l(t_0)/c \quad (3.12)$$

Заменяя переменную интегрирования $\frac{1}{\sqrt{X}}=y$, можно из (3.11) с

учетом (3.12) получить

$$\varphi_{0_1} = -\frac{1}{\pi}H\left(t-\tau-\frac{x}{c}+\frac{\xi}{c}\right)\frac{1}{x-\xi}\frac{\sqrt{x-l(t_0)}}{\sqrt{l(t_0)-\xi}}$$

Для произвольной граничной функции $\varphi_1(t, x)$ пользуясь соотношением [2]

$$\varphi_1(t, x) = -\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}\varphi_{0_1}(t, \tau, x, \xi)d\tau d\xi \quad (3.13)$$

можно получить

$$\varphi_1(t, x) = \frac{\sqrt{x-l(t_0)}}{\pi\sqrt{c}}\int_0^{t_0}\varphi_1\{\tau, x-(t-\tau)c\}\frac{d\tau}{\sqrt{l_0-\tau}(t-\tau)} \quad (3.14)$$

где учтено, что вдоль характеристики

$$l(t_0)-x+c(t-\tau)=c(t_0-\tau) \quad (3.15)$$

Для реальной задачи, в которой имеет место нулевое значение потенциала в точке $x=l(t)$, а именно, $\varphi_1(x, t) = B(x, t)\{l(t)-x\}$, интеграл в формуле (3.14) является конечным. Таким образом, для функции $\varphi_1 = \varphi_1(\tau, \xi)$, обращаемой в нуль при $\xi=l(t)$ (3.14) дает

известное по характеру особенности решение для $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ [6].

Отметим, что в [7] дано решение задачи о давлении, распространяющемся вглубь упругой среды.

Решение анизотропной задачи о антиплоской трещине в упругой среде дано в [8].

Задача о трещине рассмотрена в [9], где записаны формулы вида (1.5), (1.8), однако там не рассмотрено упрощение вблизи края трещины. Кроме того, в [3] и [9] знак перед интегралом в формуле, аналогичной (1.5), следует изменить на обратный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г., Мовсисян А. А. Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины.-Механика, ЕГУ, 1989, вып. 7, с. 3-7.
2. Сарайкин В. А., Слесян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.-Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 4, с. 54-73.
3. Костров В. Б. Неустойчившееся распространение трещины продольного сдвига.-ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1042-1050.
4. Ward G. Supersonic flow past thin wings -The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathem. 1949, V, II, Part 2.
5. Красильщикова В. Б. Тонкое крыло в сжимаемом потоке.-М.: Наука, 1978. 223с.
6. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости.-М.: Наука, 1986, 328с.
7. Мартиросян А. Н. Краевые задачи нестационарного движения анизотропных и изотропных упругих сред.- Докторская диссертация, Ереван, 1990. 278с.
8. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Сафарян Ю. С. Антиплоская задача для трещины, движущейся с произвольной скоростью в анизотропной упругой однородной среде.- Изв. НАН Армении, Механика, 1998, т. 51, № 1, с. 16-20.
9. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология.- М.: Мир, 1983. 880с.

Институт механики НАН Армении
Ереванский архитектурно-
строительный институт

Поступила в редакцию
11.02.1999