ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №1, 2000** Механика

УДК 517.9

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$

Асанян Д. Д., Оганесян А. О.

Դ. Ջ. Հասանյան, Ա. Օ. Հովհաննիսյան

$u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$ հավասարման խմբային անալիզը

Աշխատանքում վերը նշված հավասարման համար կատարվում է խմբային անալիզ: Խմբային անալիզը թույլ է տալիս նշված հավասարման ինվարիանտ լուծումների որոշումը հանգեցնել սովորական ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը:

D.J. Hasanyan, A.O. Hovanesyan

Group properties of $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$

В работе приводится групповой анализ для вышеприведенного уравнения. Групповой анализ позволяет свести нахождение инвариантных решений рассматриваемого уравнения с частными производными к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Начиная с 60-ых годов, резко возросло число работ, посвященных групповым классификациям дифференциальных уравнений. В частности, работы [1-5] посвящены групповым классификациям, построению инвариантных решений различного рода дифференциальных уравнений, встречающихся в механике сплошных сред.

Решение многих физических проблем сводится к исследованию квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными вида

$$u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q \tag{1}$$

где $m, n, p, q \in R$ – произвольные постоянные, а функция $g(u) \in C^2(R)$. На основе группового анализа получены те преобразования координат, относительно которых уравнение (1) остается инвариантным.

2. Алгебра Ли для уравнения (1)

Инфинитезимальный оператор группы симметрии уравнения (1) ищем в виде [1,2]

$$X = \xi^1(x, y, u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, y, u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(x, y, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2}$$

Тогда операторы $\underset{1}{X}$ и $\underset{2}{X}$ соответственно первого и второго продолжения группы имеют вид:

$$\underset{1}{X} = X + \varsigma_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \varsigma_2 \frac{\partial}{\partial u_y} \tag{3}$$

$$\underset{2}{X} = \underset{1}{X} + \varsigma_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varsigma_{22} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \varsigma_{12} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} \tag{4}$$

где $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_{11}, \varsigma_{12}, \varsigma_{22}$ выражаются через $\xi^1, \xi^2, \eta, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ по формулам [1]:

$$\varsigma_k = D_k(\eta) - u_i D_k(\xi^i), \quad \varsigma_{ij} = \widetilde{D}_j(\varsigma_i) - u_{ik} \widetilde{D}_j(\xi^k), \quad D_i = \partial_i + u_i \partial_u$$

$$\widetilde{D}_i = D_i + u_{ik} \partial_{u_k}, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i, \quad \partial_u = \partial / \partial u, \quad \partial_{u_k} = \partial / \partial u_k, \quad u_i = \partial / \partial x_i$$

$$x_1 = x, \; x_2 = y \quad (i = 1,2)$$

Функции ξ^1, ξ^2 и η находятся из следующего определяющего уравнения [1,2]:

$$\underset{2}{X} F \Big|_{F=0} = 0 \tag{5}$$

где $F = u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} - g(u) u_x^p u_y^q$. Уравнение (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&- f_{u_x} \{\eta_x + u_x \eta_u - u_x \xi_x^1 - (u_x)^2 \xi_u^1 - u_y \xi_x^2 - u_x u_y \xi_u^2\} - \\
&- f_{u_y} \{\eta_y + u_y \eta_u - u_x \xi_y^1 - u_x u_y \xi_u^1 - u_y \xi_y^2 - (u_y)^2 \xi_u^2\} - \\
&- n u_x^{n-1} u_y^m u_{yy} \{\eta_x + u_x \eta_u - u_x \xi_x^1 - (u_x)^2 \xi_u^1 - u_y \xi_x^2 - u_x u_y \xi_u^2\} - \\
&- m u_x^n u_y^{m-1} u_{yy} \{\eta_y + u_y \eta_u - u_x \xi_y^1 - (u_y)^2 \xi_u^2 - u_y \xi_y^2 - u_x u_y \xi_u^1\} + \\
&+ \eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + \eta_u u_x^n u_y^m u_{yy} + (u_x)^2 \eta_{uu} - 2\xi_x^1 [u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - \\
&- u_x \xi_{xx}^1 - 2(u_x)^2 \xi_{xu}^1 - 3u_x \xi_u^1 [u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - (u_x)^3 \xi_{uu}^1 - 2u_{xy} \xi_x^2 - \\
&- u_y \xi_{xx}^2 - 2u_x u_y \xi_{xu}^2 - u_y \xi_u^2 [u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - u_y (u_x)^2 \xi_{uu}^2 - 2u_x u_{xy} \xi_u^2 - \\
&- u_x^n u_y^m \{\eta_{yy} + 2u_y \eta_{yu} + u_{yy} \eta_u + (u_y)^2 \eta_{uu} - 2u_{xy} \xi_y^1 - u_x \xi_{yy}^1 - 2u_x u_y \xi_{yu}^1 - \\
&- u_x u_{yy} \xi_u^1 - 2u_y u_{xy} \xi_u^1 - u_x (u_y)^2 \xi_{uu}^1 - 2u_{yy} \xi_y^2 - u_y \xi_{yy}^2 - 2(u_y)^2 \xi_{yu}^2 - \\
&- 3u_y u_{yy} \xi_u^2 - (u_y)^3 \xi_{uu}^2\} - \eta f_u + f \eta_u = 0, \quad f(u, u_x, u_y) = g(u) u_x^p u_y^q
\end{aligned} \tag{6}$$

Для произвольных целых чисел $m, n, p, q \in R$ и функции $g(u)$ из уравнении (6) получаем $\xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2, \eta = 0$ и базис алгебры Ли имеет вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \tag{7}$$

В дальнейшем рассматриваются следующие основные случаи показателей m и n

I) $n=0,\ m=0$; II) $n=1,\ m=0$; III) $n=1,\ m=-1$; IV) $n=0,\ m=-1$; V) $n\neq 0,1,2,\ \forall m$; VI) $m=0,\ \forall n$; VII) $n=0,\ \forall m$; VIII) $n=2,\ m=-2$.

В каждом из указанных случаев из определяющего уравнения соответственно получаем

$$\text{I) } \xi^1_y=\xi^2_x,\ \xi^2_y=\xi^1_x,\ \xi^1_u=\xi^2_u=0 \tag{8}$$

$$\text{II) } -\eta_u+2\xi^2_y-\xi^1_x=0,\ \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0,\ \eta_x=0 \tag{9}$$

$$\text{III) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_x=\eta_y=0,\ \xi^2_y=\xi^1_x \tag{10}$$

$$\text{IV) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_y=0,\ \eta_u+\xi^2_y-2\xi^1_x \tag{11}$$

$$\text{V) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_x=\eta_y=0,\ (m+2)\xi^2_y+(n-2)\xi^1_x-(n+m)\eta_u=0 \tag{12}$$

$$\text{VI) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0,\ -2\xi^2_y-(n-2)\xi^1_x+n\eta_u=0 \tag{13}$$

$$\text{VII) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0,\ -(m+2)\xi^2_y+2\xi^1_x+m\eta_u=0 \tag{14}$$

$$\text{VIII) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0 \tag{15}$$

При этом определяющее уравнение (6) упрощается и принимает вид

$$\begin{gathered}\eta_{xx}-2u_x\eta_{xu}+u_x^2\eta_{uu}-u_x\xi^1_{xx}-u_y\xi^2_{xx}-u_x^n u_y^m\eta_{yy}-2u_x^n u_y^{m+1}\eta_{yu}-u_x^n u_y^{m+2}\eta_{uu}+\\+u_x^{n+1}u_y^m\xi^1_{yy}+u_x^n u_y^{m+1}\xi^2_{yy}-\eta f_u-f_{u_x}\eta_x-f_{u_x}u_x(\eta_u-\xi^1_x)+f_{u_x}u_y\xi^2_x-f_{u_y}\eta_y\\ f_{u_y}u_y(\eta_u-\xi^2_y)+f(\eta_u-2\xi^1_x)=0\end{gathered} \tag{16}$$

I) Исследование уравнения (16) приводит к следующим подслучаям.

$a)$ $p=0,\ q=0$.

$a_1)$ $g(u)$ – произвольная функция. Уравнения (8)-(16) удовлетворяются, если

$$\eta=0,\ \xi^1=c_1y+c_2,\ \xi^2=c_1x+c_3 \tag{17}$$

Полагая поочередно одну из постоянных c_i $(i=1,2,3)$ равной 1, а остальные, приравнивая к нулю, получим следующий базис алгебры Ли:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x};\ \ X_2=\frac{\partial}{\partial y};\ \ X_3=y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y} \tag{18}$$

$a_2)$ $g(u)=Ae^{\lambda u}$ $(A=\text{const},\ \lambda=\text{const})$, тогда из (8)-(16) имеем

$$\eta=-\frac{2c_1}{\lambda};\ \ \xi^1=c_1x+c_2y+c_3;\ \xi^2=c_2x+c_1y+c_4 \tag{19}$$

Базис алгебры Ли в этом случае состоит из операторов X_i $(i=1,2,3)$ и еще

$$X_4(\lambda)=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \tag{20}$$

$a_3)$ $g(u)=A(u+\alpha)^{\beta}$, $(A,\alpha,\beta=\text{const},\beta\neq 1)$. Тогда из (6)-(8) получим

$$\eta = \frac{2c_1}{1-\beta}(u+\alpha),\ \xi^1 = c_1x + c_2y + c_3,\ \xi^2 = c_2x + c_1y + c_4 \qquad (21)$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_i $(i = 1,2,3)$ и

$$X_5(\lambda) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{1-\beta}(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial u} \qquad (22)$$

При $\beta = 1$ уравнение (1) линейно и в этом случае

$$\xi^1 = c_2y + c_3,\ \xi^2 = c_2x + c_4,\ \eta = c_1u + a(x,y) \qquad (23)$$

где функция $a(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a = 0 \qquad (24)$$

Базис алгебры Ли в этом случае бесконечен.

a_4) $g(u) = Ae^{-\lambda u}$ $(A, \lambda = \text{const})$. Тогда получим случай a_2). Легко убедиться, что (6)-(8) можно удовлетворить, выбирая также

$$\xi^1 = \varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y),\ \xi^2 = -\varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y) + c_1$$

$$\eta = \frac{1}{\lambda}[\varphi_1'(x-y) + \varphi_2'(x+y)] \qquad (25)$$

b) p и q — произвольные постоянные $(p \neq 2, q \neq 2)$. Определяющие уравнения (8)-(16) можно удовлетворить при следующих подслучаях:

b_1) если $g(u)$ — произвольная функция, то

$\eta = 0, \xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2$

Базисом алгебры Ли в этом случае будут операторы X_1 и X_2.

b_2) если $g(u) = A(u+\alpha)^\beta$, то

$$\xi^1 = c_1x + c_2,\ \xi^2 = c_1y + c_3,\ \eta = c_4u + c_5,\ c_5 = \alpha c_4,\ c_4 = \frac{p-2+q}{\beta+p+q-1}c_1 \qquad (26)$$

Базис алгебры Ли в этом случае образуют операторы X_1 и X_2, а также оператор

$$X_6(\alpha,\beta,p,q) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (u+\alpha)\frac{p-2+q}{p+q-1+\beta}\frac{\partial}{\partial u} \qquad (27)$$

b_3) при $g(u) = Ae^{\lambda u}$ из (8)-(16) получим

$$\xi^1 = c_1x + c_2,\ \xi^2 = c_1y + c_3, \eta = c_5,\ c_5 = \frac{p-2+q}{\lambda}c_1 \qquad (28)$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_1 и X_2 и

$$X_7(\lambda,p,q) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{p-2+q}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \qquad (29)$$

Заметим, что

$$X_7(\lambda,0,0) = X_4(\lambda);\ X_6(\alpha,\beta,0,0) = X_5(\alpha,\beta) \qquad (30)$$

c) при $p = 2, q = 0, g(u) = (u + \alpha)^{-1}$ легко убедиться, что уравнения (8)-(16) имеют решения

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \quad \xi^2 = c_1 y + c_3, \quad \eta = (u + \alpha)(c_4 x + c_5) \tag{31}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_i $(i = 1,2,3)$ и

$$X_8 = (u + \alpha)\frac{\partial}{\partial u}, \; X_9 = x(u + \alpha)\frac{\partial}{\partial u} \tag{32}$$

d) Пусть теперь $p = 0, q = 2$. Этот случай получается из предыдущего, если поменять x на y и $g(u)$ на $-g(u)$.

II) Пусть $n = 1; m = 0$. При этом исследовании уравнений (9), (16) выделяются следующие подслучаи

a) $p = 0, q = 0$.

a_1) При $g(u) = A = \mathrm{const}$ получим

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4, \eta = c_5 u + c_6 y + c_7, \; c_5 = 2c_1, \; c_3 = 3c_1 / 2 \tag{33}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_1, X_2 и

$$X_{10} = \frac{\partial}{\partial u}, X_{11} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, X_{12} = y\frac{\partial}{\partial u} \tag{34}$$

a_2) При $g(u) = Ae^{\lambda u}$: $A, \lambda = \mathrm{const}$ получается

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_4, \eta = c_5, \; c_5 = -2c_1 / \lambda \tag{35}$$

и базис алгебры Ли составляют операторы X_1, X_2 и

$$X_{13} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_{14} = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{36}$$

a_3) При $g(u) = A(u - \alpha)^{\beta}$: $A, \alpha, \beta = \mathrm{const}$

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y - c_4, \eta = c_5 u + c_6, \; c_5 = 2c_1 /(1 - \beta), \; c_6 = \alpha c_5 \tag{37}$$

и базисными операторами алгебры Ли будут X_1, X_2, X_{11}, X_{14} и

$$X_{15} = x\frac{\partial}{\partial x} + (u + \alpha)\frac{2}{1 - \beta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{38}$$

b) $p = 1, q = 1$

b_1) $g(u) = \lambda = \mathrm{const}$. Тогда

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \; \xi^2 = c_3, \; \eta = -c_1 u + c_4 e^{-\lambda y} + c_5 \tag{39}$$

Базис алгебры Ли состоит из операторов X_1, X_2, X_{10} и

$$X_{16} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \; X_{17}(\lambda) = e^{-\lambda y}\frac{\partial}{\partial u} \tag{40}$$

b_2) $g(u) = Ae^{\lambda u}$; $A, \lambda = \mathrm{const}$. Тогда

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \; \xi^2 = \frac{c_1}{2}y + c_3, \; \eta = c_4, \; c_4 = -c_1 / 2\lambda \tag{41}$$

и к операторам X_1, X_2 добавляется

$$X_{17} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \tag{42}$$

$b_3)\, g(u) = A(u+\alpha)^{\beta}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\xi^1 = c_1x + c_2,\ \ \xi^2 = c_3y + c_4,\ \ \eta = c_5u + c_6 \\ &c_5 = -c_1/(1+2\beta),\ \ c_6 = \alpha c_5,\ \ c_3 = \beta c_1/(1+2\beta) \end{aligned} \tag{43}$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2 и

$$X_{18} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{1+2\beta}y\frac{\partial}{\partial u} - (u+\alpha)\frac{1}{1+2\beta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{44}$$

$c)\ p = 1,\ \ q = 0$.

$c_1)\ g(u) = \lambda = \mathrm{const}$, тогда

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \ \xi^2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_5)y + c_3;\ \ \eta = c_5u + c_4y + c_6 + \frac{c_1}{2}\lambda y^2 \tag{45}$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2, X_{10} и

$$X_{19} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y};\ \ X_{20} = \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\lambda y^2}{2}\frac{\partial}{\partial u};\ \ X_{21} = y\frac{\partial}{\partial u} \tag{46}$$

$c_2)\ g(u) = \lambda^2 u$. В этом случае

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \ \xi^2 = c_3;\ \ \eta = -c_1u + c_4e^{\lambda y} + c_5e^{-\lambda y} \tag{47}$$

и к операторам X_1, X_2 добавляются

$$X_{22} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u};\ \ X_{23} = e^{\lambda y}\frac{\partial}{\partial u};\ \ X_{24} = e^{-\lambda y}\frac{\partial}{\partial u} \tag{48}$$

$d)\ p = 1,\ \ q = 2$.

$d_1)\ g(u) = -\frac{3}{4}u^{-1}$, тогда

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \ \xi^2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_3)y + \frac{c_5}{4}y^2 + c_4;\ \ \eta = c_3u + c_5uy \tag{49}$$

В этом случае базис алгебры Ли состоит из операторов X_1, X_2, X_{19}

и $$X_{24} = u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y};\ \ X_{25} = \frac{y^2}{4}\frac{\partial}{\partial y} + uy\frac{\partial}{\partial u} \tag{50}$$

V) $n \neq 0,1,2;\ m - \forall$.

В этом случае уравнения (6) и (12) принимают вид

$$\begin{cases} \xi^1_y = \xi^1_u = \xi^2_x = \xi^2_u = \xi^1_{xx} = \xi^2_{yy} = \eta_x = \eta_y = \eta_{uu} = 0 \\ (n+m)\eta_u + (2-n)\xi^1_x - (m+2)\xi^2_y = 0 \\ -\eta\cdot g'(u) + g(u)[(1-p-q)\eta_u + (p-2)\xi^1_x + q\xi^2_y] = 0 \end{cases} \tag{51}$$

При изучении системы (51) выделяются следующие подслучаи:

$a)\ g(u) = A(u-\alpha)^{\beta}$. Тогда из (51) получается

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \xi^2 = c_3y + c_4;\ \eta = c_5u + c_6;\ c_6 = \alpha c_5;\ c_5 = r_1c_1;\ c_3 = r_2c_1 \quad (52)$$

где

$$r_1(\beta) = \frac{q(n-2)-(p-2)(m+2)}{q(n+m)-(m+2)(\beta-1+p+q)}$$

$$r_2(\beta) = \frac{(n-2)(\beta-1+p+q)-(p-2)(n+m)}{q(n+m)-(m+2)(\beta-1+p+q)}; \qquad n+m \neq 0$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2 и

$$X_{2}(\beta) = x\frac{\partial}{\partial x} + r_2(\beta)y\frac{\partial}{\partial y} + (u+\alpha)r_1(\beta)\frac{\partial}{\partial u} \quad (53)$$

$b)\ g(u) = Ae^{\gamma u}$. Тогда из (51) имеем

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \xi^2 = c_3y + c_4;\ \eta = c_5;\ c_6 = \alpha c_5;\ c_5 = r_1c_1;\ c_3 = r_2c_1 \quad (54)$$

где $c_3 = \dfrac{2-n}{n+m}c_1$; $c_5 = \dfrac{(p-2)(n+m)+q(2-n)}{\gamma(n+m)}c_1$; $\quad n+m \neq 0$.

При этом к операторам X_1, X_2 добавляется

$$X_{2}(\beta) = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2-n}{n+m}y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(p-2)(n+m)+q(2-n)}{\gamma(n+m)}\frac{\partial}{\partial u} \quad (55)$$

$c)$ Если $g(u)$ произвольная функция и $n+m \neq 0$, то

$$\xi^1 = c_1;\ \xi^2 = c_2;\ \eta = 0 \quad (56)$$

и базис алгебры Ли состоит из операторов X_1 и X_2.

$d)$ В случае же, когда $g(u)$ произвольно, $n+m=0$, $p+q=2$ имеем

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \xi^2 = c_1y + c_3;\ \eta = 0 \quad (57)$$

и базис алгебры Ли составляют операторы X_1, X_2 и X_3.

III) Этот случай получается из V), только в основных выражениях надо брать $n=1, m=-1$.

IV) Случай получается из случая III, только в основных выражениях надо поменять x на y, $g(u)$ на $-g(u)$ и q на $q+1$.

VI) $m=0$, $n-\forall$. Заметим, что все подслучаи, которые имели место в случае V), здесь тоже имеют место, но появляется новый вариант

$p=n$, $q=1$, и если $g(u)=\lambda=\text{const}$, то

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \xi^2 = c_3y + c_4;\ \eta = c_5u + c_6e^{-\lambda u} + c_7 \quad (58)$$

где $c_3 = 0$; $c_5 = \dfrac{(n-2)}{n}c_1$.

Базисными операторами алгебры Ли являются X_1, X_2, X_{10}, X_{17} и оператор

$$X_{28}(n) = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n+2}{n}u\frac{\partial}{\partial u} \qquad (59)$$

Заметим, что $X_{28}(1) = X_{16}$. Если сделать замену $x \to y$; $n \to -m$; $g(u) \to -g(u)$; $q \to p$; $p \to q - m$, то легко убедиться, что VIII случай совпадает со случаем VI)

Отметим, что при $p = q = 0$ получается случай, расмотренный в [5]. Здесь этот случай не приводится.

VIII) Пусть $n = 2$, $m = -2$. Все подслучаи, которые имеют место V), здесь тоже имеют место. Кроме того, можно убедиться, что определяющие уравнения (6), (15) удовлетворяются еще для произвольной функций $g(u)$ выбором

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \xi^2 = c_3 y + c_4;\ \eta(u) = c_5[g(u)]^{-\alpha} + \beta[g(u)]^{-\alpha}\int[g(s)]^{\alpha}ds \qquad (60)$$

где $\alpha = \dfrac{1}{p+q-1}$; $\beta = \dfrac{c_1(p-2)+qc_3}{p+q-1}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1978.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.- М.: Наука, 1983.
3. Минасян М. М. Некоторые исследования ударных волн в сплошных средах.-Автореферат диссертации, М.: 1973.
4. Азатян Л. Д. Определение нелинейного решения в окрестности магнитозвуковой волны.- Уч. записки ЕГУ, 1974, 3.
5. D. J. Arrigo, Group Properties of $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$, Int. J. Non-Linear Mech., 26(1), 619-629, 1991.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.02.1999