

УДК 539.3

ВОЗБУЖДЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКИ
СВЯЗАННЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ ДИЭЛЕКТРИКА И
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА

Бардзокас Д.И., Сеник Н.А.

Դ. Ի. Բարձոկաս, Ն. Ա. Սենիկ

Էլեկտրոդների գոյգով ակուստիկորեն կապակցված դիէլեկտրիկի և պիեզոէլեկտրիկի
կիսատարածություններում սահիքի ալիքների գրգռումը

Ակուստիկորեն կապակցված իսոածգական կիսատարածություններում, երբ կիսատարածու-
թյուններից մեկը պատրաստված է պիեզոէլեկտրիկից, ուսումնասիրվում է սահիքի մակերևութային ալիքի
տարածման հնարավորության հարցը, ընդ որում ենթադրվում է, որ սահիքի ալիքը տեղայնացված է
կիսատարածությունների միացման մակերևույթի շրջակայքում։ Որոշակի պայմանների դեպքում, երբ
կոնտակտային հարուրյան վրա դասավորված է տարանուն լիցքերով էլեկտրոդների գոյգը, սույն է
տրված մշված տիպի ալիքների գոյությունը։ Խնդրի լուծումը բերված է եռակի ինտեգրալ
հավասարումների համակարգի լուծմանը, որն իր հերթին հանգեցված է գծային հանրահալական
հավասարումների սեղմերի համակարգի։

D.I. Hardzokas, N.A. Senik

Perturbation of Shear Waves in Acoustic Coupled Half-Spaces of a Dielectric and a Piezoelectric with a
Pair of Electrodes

Для упругих акустически связанных полупространств, когда одно из полупространств
является пьезоэлектриком, исследуется вопрос существования сдвиговой поверхностной
волны, локализованной у контактной поверхности полупространств. При этом
предполагается, что на контактной плоскости расположено паре разноименно заряженных
электродов, возбуждающих колебания.

Наличие пьезоэффекта в среде может существенно изменять
полные поля, приводя к существованию новых типов волн. В случае
контакта двух упругих полупространств возможно существование
вертикально поляризованных волн Стоунли [1]. Аналогичная задача, когда
одно из полупространств или оба являются пьезоэлектриками,
исследовалась в [2]. Для упругих акустически связанных полупространств
сдвиговая поверхностная волна недопустима, однако, когда одно из
полупространств является пьезоэлектриком, то при определенных
условиях оказывается возможным существование сдвиговой волны,
локализованной у контактной поверхности полупространств. Эти волны
допускают возбуждение системами встречно-штыревых электродов.

1. Пусть упругий диэлектрик с модулем сдвига μ_0 , диэлектрической
проницаемостью ϵ_0 и плотностью ρ_0 занимает полупространство $y < 0$, а
полупространство $y > 0$ занято пьезоэлектриком симметрии класса $6mm$,
причем ось симметрии шестого порядка кристалла, параллельная оси z ,
расположена в контактной плоскости и перпендикулярна к направлению
распространения волны. Будем также предполагать, что на контактной

плоскости $y = 0$ расположена пара разноименно заряженных электродов, возбуждающих колебания (фиг. 1).



Фиг. 1

В области упругого диэлектрика амплитуды потенциала электрического поля и смещения могут быть представлены в виде (временной фактор $\exp(i\omega t)$ опущен)

$$\varphi_0 = \int_0^{\infty} A_0(p) \exp(py) \sin(px) dp \quad (1.1)$$

$$w_0 = \int_0^{\infty} B_0(p) \exp[ys_0(p)] \sin(px) dp \quad (1.2)$$

где $\kappa_0 = \omega/V_0$, $V_0^2 = \mu_0/\rho_0$, $s_0 = \begin{cases} (p^2 - \kappa_0^2)^{1/2}, & p > \kappa_0 \\ i(\kappa_0^2 - p^2)^{1/2}, & p < \kappa_0 \end{cases}$

В области пьезоэлектрика потенциал и смещение определим соотношениями [3,4]

$$\varphi_1 = e_{15} w / \varepsilon_{11} + \psi \quad (1.3)$$

$$\psi = \int_0^{\infty} \Phi_1(p) \exp(-py) \sin(px) dp \quad (1.4)$$

$$w_1 = \int_0^{\infty} B_1(p) \exp[-ys_1(p)] \sin(px) dp \quad (1.5)$$

Здесь $\kappa_1 = \omega/V_1$, $V_1^2 = \mu_1/\rho_1$, $\mu_1 = C_{44}(1 + k_{15}^2)$.

$$s_1 = \begin{cases} (p^2 - \kappa_1^2)^{1/2}, & p > \kappa_1 \\ i(\kappa_1^2 - p^2)^{1/2}, & p < \kappa_1 \end{cases}$$

а выбор корней s_0, s_1 согласован с условиями

излучения.

Неизвестные функции $A_0(p)$, $B_0(p)$, $\Phi_1(p)$, $B_1(p)$, входящие в (1.1)-(1.5), определим так, чтобы выполнялись следующие контактные условия при $y = 0$

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)}, \quad w_0 = w_1, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.6)$$

$$D_x^{(0)} = D_x^{(1)}, \quad -a < x < a, \quad -\infty < x < -b, \quad b < x < \infty \quad (1.7)$$

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \pm V_0, \quad -b < x < -a, \quad a < x < b$$

Используя закон Гука для упругого диэлектрика и уравнения состояния для пьезоэлектрика [3,4], с учетом соотношений (1.1)-(1.5) из условий (1.6) находим

$$\begin{aligned} B_0 &= B_1, \quad \Phi_1 = (\mu_0 s_0 + \mu_1 s_1) B_1 / (e_{15} p) \\ A_0 &= e_{15} [1 - \varepsilon_{11} (\mu_0 s_0 + \mu_1 s_1) / (e_{15}^2 p)] B_1 / \varepsilon_{11} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Дальнейшее использование уравнений состояния, соотношений (1.1)–(1.5) и условий (1.7) совместно с формулами (1.8) приводит к следующей системе тройных интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} B_1(p) \sin(px) dp = V_1, \quad a < x < b \quad (1.9)$$

$$\int_0^{\infty} p B_1(p) \sin(px) dp = 0, \quad 0 \leq x < a$$

Здесь

$$F_1(p) = k_{15}^2 p - (1 + k_{15}^2)(\mu \cdot s_0 + s_1), \quad F_2(p) = \varepsilon k_{15}^2 p - (1 + k_{15}^2)(\mu \cdot s_0 + s_1)(1 + \varepsilon) \\ B_1(p) = [1 - (1 + k_{15}^2)(1 + \varepsilon)(\mu \cdot s_0 + s_1) / (\varepsilon k_{15}^2 p)] B_2(p)$$

Так как подынтегральная функция в первом уравнении системы (1.9) может иметь полюсы, то интеграл в этом случае понимается в смысле главного значения.

2. Полюс подынтегральной функции определяется корнем уравнения

$$\delta p = \left(\mu \cdot \sqrt{p^2 - \beta^2 \kappa_1^2} + \sqrt{p^2 - \kappa_1^2} \right), \quad \beta = V_1 / V_{II}, \quad \delta = \frac{\varepsilon k_{15}^2}{(1 + \varepsilon)(1 + k_{15}^2)} \quad (2.1)$$

Анализ корней уравнения (2.1) показывает, что:

1) при $\mu \cdot = 0$ имеется единственный корень

$$p_1 = \kappa_1 / \sqrt{1 - \delta^2} \quad (2.2)$$

определяющий волну Гуляева-Блюстейна для неэлектродирированного полупространства [3,4].

2) В случае, когда скорость объемной волны в пьезоэлектрике больше скорости соответствующей волны в диэлектрике, то есть $\beta > 1$ и $\beta > 1/\sqrt{1 - \delta^2}$, уравнение (2.1) корней не имеет. Если же $1 < \beta < 1/\sqrt{1 - \delta^2}$, то корень уравнения (2.1) расположен в диапазоне

$$\beta \kappa_1 < p_1 < \min(p_1, p_2), \quad p_2 = \beta \kappa_1 / \sqrt{1 - (\delta/\mu \cdot)^2} \quad (2.3)$$

3) В случае, когда свойства сред удовлетворяют условиям $\beta < 1$ и $\beta/\sqrt{1 - \delta^2} < 1$, уравнение (2.1) корней не имеет. Если же $\beta < 1$ и $\beta/\sqrt{1 - \delta^2} > 1$ то корень уравнения удовлетворяет условиям

$$\kappa_1 < p < \min(p_1, p_2) \quad (2.4)$$

Заметим, что уравнение (2.1) является биквадратным уравнением и поэтому его прямое решение не представляет сложностей. Очевидно также, что ПАВ в рассматриваемой структуре является бездисперсионной. Влияние пьезоэффекта и диэлектрических свойств упругого диэлектрика оказывается принципиальным, поскольку пренебрежение этими параметрами приводит к потере ПАВ. Для того, чтобы полученные корни определяли экспоненциально затухающие волны при удалении от

контактной плоскости, необходимо, чтобы корни уравнения (2.1) во всех рассмотренных случаях удовлетворяли условию

$$p = \max(\beta k_1, k_1) \quad (2.5)$$

Как видно, оценки (2.3), (2.4) удовлетворяют условию (2.5).

Отметим, что аналогичные результаты были получены ранее в работе [5].

3. Система интегральных уравнений (1.9) сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений аналогично тому, как это сделано в [3] для подобных уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\omega_{nm} + \gamma_{nm}) = \delta_{0m}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

$$\omega_{nm} = \frac{\delta_{nm}}{n} - \frac{4(-\alpha)^{n+m}}{\pi(n+m)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(n-m)\theta (\cos\theta)^{n+m} d\theta}{[1 + (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta)^{1/2}]^{n+m}}, \quad n+m > 0$$

$$\omega_{00} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln[1 + (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta)^{1/2}] d\theta + 2 \ln(2/\alpha), \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\gamma_{nm} = \int_0^{\infty} F_0(\xi) J_n\left(\xi \frac{\bar{b}-1}{2}\right) J_m\left(\xi \frac{\bar{b}-1}{2}\right) S_n\left(\xi \frac{\bar{b}+1}{2}\right) S_m\left(\xi \frac{\bar{b}+1}{2}\right) \frac{d\xi}{\xi}, \quad \xi = pa, \quad \bar{b} = b/a$$

$$F_0(\xi) = \frac{k_{15}^2(1+k_{15}^2)(\mu \cdot s_2^* + s_1^*) - k_{15}^2(1+k_{15}^2)(1+\mu) \cdot \xi}{[k_{15}^2 - (1+k_{15}^2)(1+\mu)] [\partial k_{15}^2 \xi - (1+k_{15}^2)(1+\partial)(\mu \cdot s_2^* + s_1^*)]}$$

$$\alpha = (b-a)/(b+a), \quad \lambda = k_1 \alpha, \quad s_1^* = (\xi^2 - \lambda^2)^{1/2}, \quad s_2^* = (\xi^2 - \beta^2 \lambda^2)^{1/2}$$

Функция $S_n(\dots)$ определена в [3].

Функция $B_n(\xi)$, входящая в систему (1.9), связана с решением системы (3.1) выражением

$$\xi B_n(\xi) = C \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n\left(\xi \frac{\bar{b}-1}{2}\right) S_m\left(\xi \frac{\bar{b}+1}{2}\right) \quad (3.2)$$

$$\text{где } C = 2 \frac{\partial_{11} V a \partial_{11} k_{15}^2 - (1+k_{15}^2)(1+\partial)(\mu \cdot +1)}{e_{15} \partial k_{15}^2 - (1+k_{15}^2)(\mu \cdot +1)}$$

После решения системы (3.1) характеристики полей в пьезоэлектрике и упругом диэлектрике могут быть определены. Заметим, что при вычислении интегралов γ_{nm} необходимо учитывать полюс в подынтегральной функции, который может существовать при установленных выше условиях.

Не останавливаясь на деталях вычислений, приведем выражение для потенциала электрического поля в диэлектрике

$$\Phi_0 = \frac{e_{15} \partial}{\partial_{11} a} \int_0^{\infty} \frac{k_{15}^2 \xi - (1+k_{15}^2)(\mu \cdot s_2^* + s_1^*) B_n(\xi) \exp(\xi \bar{y}) \sin(\xi \bar{x}) d\xi}{f_0(\xi)} \quad (3.3)$$

$$\partial k_{15}^2 \xi - (1 + k_{15}^2) (1 + \partial) (\mu s_2^* + s_1^*) = f_0(\xi), \quad \bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/a, \quad \xi = \rho \eta$$

Учитывая вклад полюсной точки при интегрировании (3.3), для распространяющейся в положительном направлении оси x волны получим

$$\varphi_0^+ = N_0 G(\xi_+) Q(\xi_+) \exp(\xi_+ \bar{y}) \exp[i(\omega t - \xi_+ x)], \quad y < 0 \quad (3.4)$$

Здесь введены обозначения

$$N_0 = \frac{\partial k_{15}^2 - (1 + k_{15}^2) (1 + \partial) (\mu + 1)}{k_{15}^2 - (1 + k_{15}^2) (\mu + 1)} V \pi, \quad Q(\xi_+) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n \left(\xi_+ \frac{b-1}{2} \right) S_n \left(\xi_+ \frac{b+1}{2} \right)$$

$$G(\xi_+) = \frac{k_{15}^2 \xi_+ - (1 + k_{15}^2) [\mu s_2^*(\xi_+) + s_1^*(\xi_+)]}{f_0(\xi_+)}, \quad f_0'(\xi_+) = \frac{df_0(\xi_+)}{d\xi_+}$$

причем ξ_+ — корень уравнения $f_0(\xi) = 0$, а полюс при интегрировании обходится сверху.

Аналогично определяется сдвиговое смещение в диэлектрическом полупространстве, связанное с распространяющейся поверхностной волной

$$\psi_0^+ = N_0 \frac{k_{15}^2 \partial_{11}}{e_{15}} Q(\xi_+) \exp[s_1^*(\xi_+) \bar{y}] \exp[i(\omega t - \xi_+ x)] / f_0'(\xi_+), \quad y < 0 \quad (3.5)$$

Проведенные вычисления для пьезоэлектрического полупространства приводят к следующим формулам:

$$\varphi_1^+ = N_0 k_{15}^2 Q(\xi_+) \left[\exp(-s_2^*(\xi_+) \bar{y}) - \frac{1 + k_{15}^2}{k_{15}^2} \frac{\mu s_2^*(\xi_+) + s_1^*(\xi_+)}{\xi_+} \exp(-\xi_+ \bar{y}) \right] \times$$

$$\times \exp[i(\omega t - \xi_+ x)] / f_0'(\xi_+), \quad y > 0 \quad (3.6)$$

$$\psi_1^+ = N_0 \frac{k_{15}^2 \partial_{11}}{e_{15}} Q(\xi_+) \exp(-s_1^*(\xi_+) \bar{y}) \exp[i(\omega t - \xi_+ x)] / f_0'(\xi_+), \quad y < 0$$

Соотношения (3.5), (3.6) позволяют определить другие характеристики полей и затем подсчитать потоки энергии, переносимые в полупространствах. В направлении распространения волны проинтегрированные по переменной y суммарные потоки механической и электрической энергий определяются соответственно по формулам

$$Q_1^{(M)} = \frac{\omega \partial_{11} N_0^2}{4} [Q(\xi_+) G(\xi_+) / \xi_+]^2$$

$$Q_1^{(E)} = \frac{\omega N_0^2 k_{15}^4 \partial_{11}^2}{4 e_{15}^2} [Q(\xi_+) / f_0(\xi_+)]^2 \frac{\mu_0 \xi_+}{a s_1^*(\xi_+)} \quad (3.7)$$

$$Q_1^{(T)} = \frac{\omega \partial_{11} \xi_+}{2} \left[\frac{N_0 k_{15}^2 |Q(\xi_+)|^2}{f_0(\xi_+)} \right]^2 \left\{ \frac{1}{2 s_1^*(\xi_+)} + \frac{1}{2 \xi_+} \left[\frac{1 + k_{15}^2}{k_{15}^2} (\mu s_2^*(\xi_+) + s_1^*(\xi_+)) \right]^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1 + k_{15}^2}{k_{15}^2} \frac{\mu s_2^*(\xi_+) + s_1^*(\xi_+)}{\xi_+ + s_1^*(\xi_+)} \right\} \quad (3.8)$$

$$Q_1^{(e)} = \frac{\omega \xi_{13}^2 (1 + k_{13}^2) N_0^2 \varepsilon_{11} |Q(\xi_*)|^2}{2a [f_0(\xi_*)]^2} \left| \frac{\mu s_2^*(\xi_*) + s_1^*(\xi_*)}{(\xi_* + s_1^*(\xi_*)) \xi_*} - \frac{1}{2s_1^*(\xi_*)} \right|$$

причем формулы (3.8) относятся к упругому диэлектрику, а (3.7) — к пьезоэлектрику.

Из полученных формул следует, что отношения вида $Q_1^{(e)} / Q_1^{(e)}$ не зависят от величины $|Q(\xi_*)|$ и поэтому доля каждой из энергий в общем потоке энергии может быть определена без решения системы уравнений (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoneley R. The elastic waves at the interface of separation of two solids. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1924, 106, A, p.416-429.
2. Гетман И.П., Лисицкий О.Н. Исследование поверхностных волн Стоунли на границе раздела электроупругих сред. — ПМ, 1987, т.23, №9, с.67-72.
3. Партон В.Э., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. — М.: Наука, 1988. 470 с.
4. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. — Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
5. Филиппов В.В., Любимов В.Н. О поверхностных поперечных упругих волнах на границе диэлектрика с пьезоэлектриком. — Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. н., 1982, №3, с.69-73.

Афинский национальный
технический университет, Греция

Поступила в редакцию
20.04.1999