

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ
СДВИГОВЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Белубекян М.В., Казарян К.Б.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան

Սահրի մակերևութային ալիքների գոյության հարցը ոչ համասեռ առաձգական կիսատարածությունում

Աշխատանքը ուսումնասիրվում է ՏՄ սիսթի մակերևութային ալիքների գոյության հարցը ըստ խորության անհամասեռ կիսատարածությունում: Հաստատված է, որ այս հարցի հետադարձումը սերտ կապված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրի հետևազուտման հետ: Որոշված են մակերևութային ալիքի գոյության ընդհանուր պայմանները:

M.V. Belubekyan, K.B. Kazaryan

On Existence Problem for Surface Shear Waves in Non-Homogeneous Elastic Semi-Space

В работе исследуется вопрос существования поверхностных СН-волн в неоднородном по глубине упругом полупространстве. Показано, что исследование этого вопроса тесно связано с исследованием спектра самосопряженного дифференциального оператора второго порядка. Определены общие условия существования поверхностных сдвиговых волн в зависимости от неоднородности среды и класс функции, характеризующих неоднородность.

Исследованию вопроса распространения сдвиговых поверхностных волн с заданными характеристиками неоднородности посвящены многочисленные работы, в частности укажем на работы [1-3]. Отметим также работу [4], где исследован вопрос существования дискретного вещественного спектра собственных частот колебаний полубесконечной неоднородной мембраны.

1. Перед тем, как перейти к рассмотрению вопроса в общей постановке, приведем иное решение классической задачи Лява для упругого слоя ($0 < x < h$), лежащего на упругом полупространстве ($h < x < \infty$).

Пусть, двухслойная упругая среда имеет следующие характеристики:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho_1 & \mu(x) &= \mu_1 & x &\in (0, h) \\ \rho(x) &= \rho_0 & \mu(x) &= \mu_0 & x &\in (h, \infty) \end{aligned}$$

где ρ - плотность, μ - модуль сдвига среды.

Упругое поле сдвиговых волн характеризуется вектором перемещения

$$\vec{U}(x, y, t) = [0, 0, U(x, y, t)] \text{ и уравнением движения}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Изучая вопрос распространения монохроматической волны вдоль

границы полупространства $-\infty < y < \infty$, примем

$$U(x, y, t) = U(x) \exp i(ky - \omega t)$$

Для функции $U(x)$, характеризующей изменение амплитуды волн по глубине полупространства, имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-\frac{d^2 U}{dx^2} + g(x)U = \lambda U \quad x \in (0, \infty) \quad (1.1)$$

$$g(x) = \omega^2 \left(\frac{\rho_0}{\mu_0} - \frac{\rho_1}{\mu_1} \right) \quad x \in (0, h), \quad g(x) = 0 \quad x \in (h, \infty), \quad \lambda = \frac{\omega^2 \rho_0}{\mu_0} - k^2$$

Уравнение (1.1) должно рассматриваться совместно с граничным условием на границе $x = 0$. На свободной или закрепленной границах имеем, соответственно

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad U = 0 \quad (1.2)$$

К краевой задаче (1.1, 1.2) может быть использована известная в теории дифференциальных операторов теорема [5], которую сформулируем следующим образом.

Пусть функция $g(x)$ является суммируемой в интервале $(0, \infty)$. Тогда непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения оператора $\tilde{L}(U)$, порожденного дифференциальным выражением (1.1), заполняет всю положительную полуось $\lambda \geq 0$, а на отрицательной полуоси $\lambda < 0$ может находиться только дискретная часть спектра оператора. При этом собственные функции имеют следующую асимптотику при $x \rightarrow \infty$:

$$U(x, \lambda) = \exp(-\sqrt{|\lambda|x}) \quad (1.3)$$

$$\frac{dU(x, \lambda)}{dx} = -\sqrt{|\lambda|} \exp(-\sqrt{|\lambda|x})$$

На основе этой теоремы сразу следует следующий вывод, соответствующий решению классической задачи Лява.

Краевая задача (1.1) не имеет решения с асимптотикой (1.3), если $g(x) \geq 0, \lambda < 0$. Действительно, в этом случае имеем

$$[U(x)U'(x)] = U^2(x)[g(x) - \lambda] > 0 \quad () = \frac{d}{dx}$$

Функция $U(x)U'(x)$, будучи монотонной, не может иметь в любом интервале более одного нуля, и, следовательно, если функция $U(x)$ имеет нуль, то $U'(x)$ не может иметь нуля и наоборот. Следовательно, для рассматриваемых граничных условий имеем $U(x) \equiv 0$.

Приведем решение задачи (1.1) с помощью метода интегральных уравнений. Представляя решение $U(x, \lambda)$ в виде

$$U(x, \lambda) = \bar{U}(x, p) \exp(-px) \quad p = \sqrt{\lambda}$$

получим следующее интегральное уравнение относительно функции $\bar{U}(x, p)$:

$$\bar{U}(x, p) = 1 + \frac{1}{2p} \int_0^x (1 - e^{-2px} e^{-2ps}) g(s) \bar{U}(s, p) ds \quad x \in (0, \infty)$$

Так как $g(x)$ — финитная функция, то

$$\bar{U}(x, p) = 1 + g_0 \int_0^x (1 - e^{-2px} e^{-2ps}) \bar{U}(s, p) ds \quad x \in (0, h)$$

$$\bar{U}(x, p) = 1 \quad x \in (h, \infty)$$

где $g_0 = \frac{\omega^2}{2p} \left(\frac{\rho_0}{\mu_0} - \frac{\rho_1}{\mu_1} \right)$

Вводя в рассмотрение функции

$$Z_1(x, p) = g_0 \int_0^x \bar{U}(s, p) ds, \quad Z_2(x, p) = g_0 \int_x^h e^{-2ps} \bar{U}(s, p) ds$$

имеем $\bar{U}(x, p) = 1 + Z_1(x, p) - e^{-2px} Z_2(x, p)$

Функции $Z_1(x, p), Z_2(x, p)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\frac{dZ_1}{dx} + g_0(1 + Z_1) - g_0 e^{-2px} Z_2 = 0, \quad \frac{dZ_2}{dx} - g_0 Z_2 + g_0 e^{-2px} (1 + Z_1) = 0 \quad (1.4)$$

Из решения системы (1.4) для функции $U(x, p)$ имеем классическое решение Лява [6]:

$$U(x, p) = e^{-px} \left[\cos \beta(x-h) - \frac{p\mu_1}{\beta\mu_0} \sin \beta(x-h) \right] \quad x \in (0, h)$$

$$U(x, p) = e^{-px} \quad x \in (h, \infty), \quad \beta = \sqrt{-(p^2 + 2pg_0)} = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho_1}{\mu_1} - k^2}$$

2. Перейдем теперь к рассмотрению задачи для неоднородного полупространства, характеризуемого функциями $\mu(x) > 0, \rho(x) > 0$, заданными в области $x \in (0, \infty)$.

Имеем следующее уравнение для амплитуды поверхностной волны $U(x)$

$$\frac{d}{dx} \left[\mu(x) \frac{dU}{dx} \right] - k^2 \mu(x) U = -\rho(x) \omega^2 U$$

Переходя от функции $U(x)$ к функции $V(x) = \sqrt{\mu(x)} U(x)$, получим

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2 \rho(x)}{\mu(x)} - k^2 - \varphi^2 - \frac{d\varphi}{dx} \right] V = 0 \quad (2.1)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\mu} \frac{d\mu}{dx}$$

Пусть функции $\mu(x), \rho(x)$ таковы, что

$$\frac{d\varphi}{dx} + \varphi^2 = \psi_1(x) + \alpha$$

$$\frac{\rho(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{c_0^2} [1 + \psi_2(x)] \quad |\psi_2(x)| < 1 \quad (2.2)$$

где α — некоторая постоянная, а $\psi_1(x), \psi_2(x)$ — суммируемые функции в интервале $(0, \infty)$. Тогда, записывая краевую задачу (2.1) в виде

$$-\frac{d^2 V}{dx^2} + g(x)V = \lambda V \quad x \in (0, \infty) \quad (2.3)$$

$$\frac{dV}{dx} = \varphi(x)V \quad x = 0 \quad (2.4)$$

$$V = 0 \quad x = 0$$

где

$$g(x) = \psi_1(x) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \psi_2(x), \quad \lambda = \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 - \alpha, \quad c_0^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu(x)}{\rho(x)}$$

придем к следующему выводу.

Краевая задача (2.3), (2.4) при выполнении условий (2.2) имеет решение с асимптотикой (1.3), при $\lambda < 0$. При этом из краевых условий определяются отрицательные собственные значения, множество которых конечно.

Представляет отдельный интерес случай $g(x) > 0$. В этом случае функция $V(x)$, а следовательно, и функция $U(x)$ не может иметь более одного нуля. В силу того, что функция $[V(x)V'(x)] > 0$, а в точке $x = 0$ имеем $V'(0)V(0) = \varphi(0)V^2(0)$, из монотонности функции $V(x)V'(x)$ следует, что для существования стремящегося к нулю на бесконечности решения необходимо, чтобы $\varphi(0) < 0$. Таким образом, при $g(x) > 0$ и $\varphi(0) < 0$ краевая задача имеет единственное собственное значение и соответствующее ему одну собственную функцию.

В случае граничного условия $V(0) = 0$ рассматриваемая краевая задача имеет только решение $V(x) = 0$.

Уравнение (2.3) имеет решение, удовлетворяющее следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$V(x, p) = e^{-px} \bar{V}(x, p) \quad (2.5)$$

$$\bar{V}(x, p) = 1 + \frac{1}{2p} \int_x^{\infty} (1 - \exp 2p(x-s)) g(s) \bar{V}(s, p) ds$$

Для заданной функции $g(x)$ можно всегда получить решение интегрального уравнения в виде бесконечного ряда.

Применяя к уравнению (2.5) метод последовательных приближений, получим

$$\bar{V}(x, p) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, p) \quad (2.6)$$

где

$$H_1(x, p) = \int_x^{\infty} K_0(x, s, p) ds, \quad H_2(x, p) = \int_x^{\infty} K_0(x, s, p) \left(\int_x^{\infty} K_0(s, \xi, p) d\xi \right) ds$$

$$K_n(x, s, p) = [1 - \exp 2p(x-s)] g(s), \quad H_{n+1}(x, p) = \int_x^{\infty} K_n(x, s, p) H_n(s, p) ds$$

В частности, для функции $g(x) = -ae^{-qx}$ имеем

$$H_n(x, p) = \frac{(-1)^n a^n e^{-qx}}{q^n (2p+q)(2p+2q)(2p+3q) \dots (2p+nq)}$$

Покажем, что функция $H_n(x, p)$ удовлетворяет оценке

$$|H_{n+1}(x, p)| \leq \frac{\eta^{n+1}(x)}{(n+1)!} \quad (2.7)$$

где

$$\eta(x) = \frac{1}{2p} \int_x^{\infty} |g(s)| ds$$

Так как $|K_n(x, s, p)| \leq \frac{1}{2p} |g(s)|$, то при $n = 0$ оценка очевидна.

Допустим, что эта оценка справедлива для n и покажем ее справедливость и для $n+1$.

Так как $\frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{2p} |g(x)|$, то имеем

$$|H_{n+1}(x)| \leq \int_x^{\infty} |K_n(x, s, p)| \frac{\eta^n(s)}{n!} ds \leq \frac{1}{2p} \int_x^{\infty} |g(s)| \frac{\eta^n(s)}{n!} ds \leq \frac{\eta^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

Из оценки (2.7) следует сходимость ряда (2.6), а также, что

$$|\bar{V}(x, p)| \leq \exp[\eta(x)], \quad |V(x, p)| \leq \exp[\eta(x) - px]$$

Из граничного условия (2.4) получим следующее уравнение, корни которого определяют отрицательные собственные значения, множество которых конечно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [H_n(0, p) - (\varphi(0) + p)H_n(0, p)] = \varphi(0) + p$$

3. Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров неоднородности. Сначала рассмотрим случай слабо неоднородной среды [1-2].

Пусть $\rho(x) = \rho_0(1 + \varepsilon_p e^{-qx})$, $\mu(x) = \mu_0(1 + \varepsilon_\mu e^{-qx})$, $|\varepsilon_\mu| < 1$, $|\varepsilon_p| < 1$, $q > 0$.

Для этой среды функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi(x)$ имеют вид

$$\psi_1(x) = \frac{q^2 \varepsilon_p e^{-qx} (2 + \varepsilon_p e^{-qx})}{4(1 + \varepsilon_\mu e^{-qx})^2}, \quad \psi_2(x) = \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_\mu) e^{-qx}}{c_0^2 (1 + \varepsilon_\mu e^{-qx})}, \quad \varphi(x) = -\frac{\varepsilon_\mu q e^{-qx}}{2(1 + \varepsilon_\mu e^{-qx})}$$

Так как функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ являются суммируемыми, то в этой среде возможно существование решений в виде поверхностных волн.

В частности, если $\varepsilon_p < \varepsilon_\mu$, $\varepsilon_\mu > 0$, то в этом случае $g(x) > 0$, $\varphi(0) < 0$ и, следовательно, красная задача имеет единственное решение. В остальных случаях имеем конечное множество решений.

Теперь обратимся к другому примеру неоднородности, допускающего решение с помощью функций Бесселя.

Пусть

$$\mu(x) = \mu_0 \operatorname{ch}^2(\alpha x + \beta), \quad \rho(x) = \rho_0 \operatorname{ch}^2(\alpha x + \beta) (1 + \gamma e^{-2qx}), \quad \alpha > 0, q > 0, |\gamma| < 1$$

В этом случае функция $g(x)$ имеет вид

$$g(x) = -\frac{\omega^2 \gamma}{c_0^2} e^{-2qx}$$

а для λ имеем

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 - \alpha^2, \quad c_0^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$$

На основе вышеизложенных результатов можно заключить, что при $\gamma > 0$, $\lambda < 0$ задача имеет не более чем счетное число собственных функций, соответствующих поверхностным волнам.

В случае, когда $\gamma < 0$, задача имеет единственное решение, если

$$\varphi(0) = \alpha \theta \beta < 0, \quad \alpha > 0, \beta < 0$$

Аналогичные результаты можно получить также из непосредственного решения уравнения (2.3).

Уравнение (2.3) с помощью замены переменной $z(x) = \frac{\omega \sqrt{\gamma}}{c_0 q} e^{-qx}$

приводится к уравнению Бесселя

$$z^2 V'' + zV' + (z^2 - u^2)V = 0; \quad u = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{q} \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) при $\gamma > 0$ имеет решение $V(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 K_\nu(z)$

В точке $z = 0$ функция $K_\nu(z)$ имеет особенность, а функция $J_\nu(z)$

нуль ν - порядка и, следовательно, принимая $C_2 = 0$, имеем

$$V(z) = J_\nu \left(\frac{\omega \sqrt{\gamma}}{c_0 q} e^{-\gamma z} \right)$$

При $x \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow 0$) имеем $V \sim e^{-\sqrt{\lambda} x}$.

Из граничных условий получим следующие уравнения, определяющие собственные значения:

$$-z_0 J'_\nu(z_0) = \frac{\varphi(0)}{q} J_\nu(z_0), \quad z_0 = \frac{\omega \sqrt{\gamma}}{c_0 q}$$

или

$$J'_\nu(z_0) = 0 \quad (3.2)$$

Трансцендентные уравнения (3.2) имеют конечное число решений, относительно индекса ν (собственных чисел)

При $\gamma < 0$ имеем, соответственно

$$V(z) = C_1 J_\nu(iz) = C_1 I_\nu(z), \quad z = \frac{\omega \sqrt{|\gamma|}}{c_0 q} e^{-\gamma z}$$

где $I_\nu(z)$ есть модифицированная функция Бесселя первого рода. Функция $I_\nu(z)$ является монотонно возрастающей функцией от своего аргумента, имеющая в точке $z = 0$ нуль ν - порядка.

Соответствующее трансцендентное уравнение

$$-z_0 I'_\nu(z_0) = \frac{\varphi(0)}{q} I_\nu(z_0), \quad z_0 = \frac{\omega \sqrt{|\gamma|}}{c_0 q}$$

в силу монотонности функции $I_\nu(z_0)$, ($I'_\nu(z_0) > 0$) имеет единственное решение, если $\varphi(0) < 0$. В остальных случаях оно не имеет решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - М.: Наука, 1981. 288с.
2. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговые поверхностные волны в слабо неоднородных упругих средах. - Акустический журнал, 1996, т. 42, №2, с.179-182.
3. Maugin G.A. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization. - Advances in Applied Mechanics. 1983, v.23, p.373-474.
4. Абрамян А.К., Индейцев Д.А. Ловушечные моды колебаний в мембране с неоднородностью. - Акустический журнал, 1998, т.44, №4, с.437-442.
5. Паймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969. 526с.
6. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. 872с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
24.03.1999