

УДК 517:934

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
 КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ

Саркисян Саркис В., Шагинян С.Г.

Սարգիս Վ. Սարգսյան, Ս Գ. Շահինյան
 Սալի ոչ գծային տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիան

Գիտարկվում է հողակապորեն ամրացված ուղղանկյուն սալի ոչ գծային տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը՝ Ստաբիլիզացիան կատարվում է սալի վերին հարրուրյան վրա կիրառված ուղղահայաց բեռի օգնությամբ. խնդիրը թերված է երկրորդ կարգի անցատվող փոփոխականներով սովորական ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ համակարգի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդրին՝ Որոշված է Լյապունովի օպտիմալ ֆունկցիան և օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունը համակարգի ենթադրյալ միմինիզացիայի դեպքում:

Sarkis V. Sarkisyan, S.G. Shahinyan
 Optimal Stabilization of Nonlinear Vibrations of a Plate

Рассмотрена задача оптимальной стабилизации нелинейных колебаний пластинки распределенной силой, приложенной к поперечному направлению верхней поверхности. Представляя решения в виде рядов Фурье, задачи свободных колебаний сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно времени. Далее рассматривается следующая задача оптимальной стабилизации: определить такое оптимальное стабилизирующее воздействие, которое минимизирует функционал, представляющий собой полную энергию по всей поверхности пластинки, и удовлетворяет всем граничным и начальным условиям.

Функция Ляпунова разлагается в ряд, где первый член — функция Ляпунова для линейной системы, а последующие — нелинейное приближение. Применяя теорему Ляпунова-Бельмана, решается линейная задача. Далее для остальных приближений используются преобразования, с помощью которых определяют последующие приближения функции Ляпунова.

Получены выражения для оптимального управления и стабилизирующей силы. Используя известные методы, доказана равномерная сходимость рядов решений и конечность минимизирующих интегралов.

Рассматриваются нелинейные колебания шарнирно опертой прямоугольной пластинки плотности ρ , постоянной толщины h , $(a \times b)$ с краями, свободно смещающимися в плоскости опорного контура [1]. Пластинка стабилизируется при помощи поперечной нагрузки $q(x, y, t)$, приложенной к верхней поверхности пластинки. Поперечное перемещение срединной поверхности пластинки обозначим через $w(x, y, t)$. Дифференциальные уравнение нелинейных колебаний будут [1]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = L(w, \Phi) - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{q}{h} \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w)$$

где D — жесткость пластинки, Φ — функция напряжения срединной поверхности,

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2)$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Края пластинки удовлетворяют следующим условиям шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x = 0, x = a \\ y = 0, y = b \end{matrix} \quad (3)$$

а перемещение w и функция напряжений Φ связаны между собой известным соотношением [1].

Начальные условия для решения системы (1) таковы:

$$w(x, y, 0) = \Psi(x, y) \quad \dot{w}(x, y, 0) = \Psi_1(x, y) \quad (4)$$

где $\Psi(x, y)$ и $\Psi_1(x, y)$ — соответственно, начальный прогиб и начальная скорость срединной поверхности.

Задача оптимальной стабилизации заключается в следующем: определить оптимальное стабилизирующее воздействие $q(x, y, t)$ так, чтобы выполнялись условия

$$w(x, y, \infty) \rightarrow 0, \quad \dot{w}(x, y, \infty) \rightarrow 0 \quad (5)$$

при минимизации функционала

$$J[u] = K + V + \frac{g}{h\gamma} \int_0^x \int_0^y \int_0^t q^2 dx dy dt$$

где K — кинетическая, V — потенциальная энергии системы.

Выберем для прогиба выражение:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b} \quad (6)$$

Далее, как обычно, решая систему уравнений (1) применяя метод Бубнова-Галеркина, приходим к следующим безразмерным обыкновенным дифференциальным уравнениям, описывающим нелинейные колебания пластинки [1]:

$$\frac{d^2 \xi_{mn}}{dt^2} + \omega_{0,mn}^2 (\xi_{mn} + \eta_{mn} \xi_{mn}^3) = \bar{q}_{mn}(t) \quad (7)$$

где

$$\xi_{mn}(t) = \frac{f_{mn}(t)}{h}, \quad \eta_{mn} = \frac{3}{4} (1 - \mu^2) \left[1 + \left(\frac{n}{m} \lambda \right)^4 \right] \left/ \left[1 + \left(\frac{n}{m} \lambda \right)^2 \right]^2 \right.$$

$$\omega_{0,mn}^2 = \frac{\pi^4 m^4 (1 + \frac{n^2}{m^2} \lambda^2)^2}{12 \lambda^2 (1 - \mu^2)} \left(\frac{ch}{ab} \right)^2, \quad \bar{q}_{mn}(t) = \frac{16}{\pi^2 E} \left(\frac{c}{h} \right)^2 q_{mn}(t), \quad \lambda = \frac{a}{b}$$

а $q_{mn}(t)$ — коэффициент разложения в ряд Фурье нагрузки $q(x, y, t)$

$$q(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \sin \frac{\pi x m}{a} \sin \frac{\pi y n}{b} \quad (8)$$

Теперь задачу оптимальной стабилизации для каждого m, n можно сформулировать следующим образом: определить оптимальное стабилизирующее воздействие так, чтобы выполнялись условия

$$\xi_{mn}(\infty) \rightarrow 0, \quad \dot{\xi}_{mn}(\infty) \rightarrow 0 \quad (9)$$

и минимизировался функционал

$$J_{mn} = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{d\xi_{mn}}{dt} \right)^2 + \omega_{0,mn}^2 \xi_{mn}^2 + \bar{q}_{mn}^2 \right] dt \quad (10)$$

по всей поверхности пластинки (так как минимум суммы равен сумме минимумов). Как управляющая функция рассматривается $\bar{q}_{mn}(t)$.

Преобразуем систему (7), вводя обозначения

$$x_1 = \omega_0 \xi; \quad x_2 = \dot{\xi}; \quad u = \bar{q}(t) \quad (11)$$

Ввиду того, что аналогичным образом нужно поступать для всех значений индексов m и n , они опущены.

Из (7) и (11) получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_0 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0 x_1 - \frac{\eta}{\omega_0} x_1^3 + u \end{aligned} \quad (12)$$

Используя обозначения (11), функционал (10) примет следующий вид:

$$J = \int_0^{\infty} (u^2 + x_1^2 + x_2^2) dt \quad (13)$$

Система уравнений (12) нелинейная. Для тривиального решения задачи оптимальной стабилизации воспользуемся методом, предложенным в [2].

Функция Ляпунова для системы (12) представляется в виде

$$V(x_1, x_2) = V_2(x_1, x_2) + V_3(x_1, x_2) + \dots \quad (14)$$

где $V_k(x_1, x_2)$ — форма k -того порядка.

Линейное приближение системы (10) следующее:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_0 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0 x_1 + u \end{aligned} \quad (15)$$

для которого принимаем

$$V_2(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + 2c_2 x_1 x_2 + c_3 x_2^2 \quad (16)$$

Воспользуясь известным уравнением Бельмана и представлением (16), получим

$$\begin{aligned} (2c_1 x_1 + 2c_2 x_2) \omega_0 x_2 - (2c_2 x_1 + 2c_3 x_2) \omega_0 x_1 - \\ - \frac{1}{4} (2c_2 x_1 + 2c_3 x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты c_1, c_2, c_3 , удовлетворяющие условию определенно-положительности функции $V_2(x_1, x_2)$, будут:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\sqrt{1 - 2\omega_0^2 + 2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + 1}}\sqrt{\omega_0^2 + 1}}{\omega_0} \\ c_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + 1} - \omega_0 \\ c_3 &= \sqrt{1 - 2\omega_0^2 + 2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + 1}} \end{aligned} \quad (18)$$

Для линейного приближения (13) оптимальное управление следующее:

$$u_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -c_2 x_1 - c_3 x_2 \quad (19)$$

Для упрощения вычислений последующих приближений функции $V(x_1, x_2)$, воспользуемся следующим линейным преобразованием, приводящим функцию $V_2(x_1, x_2)$ к каноническому виду:

$$y_1 = \sqrt{c_1} x_1 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}} x_2 \quad (20)$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_1}} x_2$$

$$V_2(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 \quad (21)$$

Используя преобразования (20), уравнения (12) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{c_2 \omega_0}{c_1} y_1 + \frac{\omega_0 (c_1^2 + c_2^2)}{c_1 c_4} y_2 - \frac{c_2 \eta}{c_1^2 \omega_0} y_1^3 + \\ &+ \frac{3c_2^2 \eta}{c_1^2 \omega_0 c_4} y_1^2 y_2 - \frac{3c_2^2 \eta}{c_1^2 \omega_0 c_4^2} y_1 y_2^2 + \frac{c_4^2 \eta}{c_1^2 \omega_0 c_4^3} y_2^3 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}} u \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= -\frac{c_4 \omega_0}{c_1} y_1 + \frac{\omega_0 c_2}{c_1} y_2 - \frac{c_4 \eta}{c_1^2 \omega_0} y_1^3 + \frac{3c_2 \eta}{c_1^2 \omega_0} y_1^2 y_2 - \\ &- \frac{3c_2^2 \eta}{c_1^2 \omega_0 c_4} y_1 y_2^2 + \frac{c_4^2 \eta}{c_1^2 \omega_0 c_4^2} y_2^3 + \frac{c_4}{\sqrt{c_1}} u \end{aligned}$$

а минимизируемый функционал (11) —

$$J = \int_0^{\infty} \left(u^2 + \frac{1}{c_1 \omega_0^2} y_1^3 - \frac{2c_2}{c_1 \omega_0^2 c_4} y_1 y_2 + \frac{c_2^2 + c_1^2 \omega_0^2}{c_1 \omega_0^2 c_4^2} y_2^3 \right) dt \quad (23)$$

где $c_4 = \sqrt{c_1 c_3 - c_2^2}$

Далее, используя метод, предложенный в [2], для последующих приближений функции Ляпунова будем иметь:

$$V_3(y_1, y_2) = V_5(y_1, y_2) = V_7(y_1, y_2) = \dots = 0 \quad (24)$$

$$V_4(y_1, y_2) = A_1 y_1^4 + A_2 y_1^3 y_2 + A_3 y_1^2 y_2^2 + A_4 y_1 y_2^3 + A_5 y_2^4$$

$$V_6(y_1, y_2) = B_1 y_1^6 + B_2 y_1^5 y_2 + B_3 y_1^4 y_2^2 + B_4 y_1^3 y_2^3 + B_5 y_1^2 y_2^4 + B_6 y_1 y_2^5 + B_7 y_2^6$$

.....

где $A_i (i = 1, \dots, 5)$ — следующие:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad A_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad A_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} \quad (25)$$

а коэффициенты остальных форм четного порядка определяются аналогичным образом.

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 4d_{21} & d_{22} & 2d_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 3d_{21} & d_{33} & 3d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 2d_{31} & d_{44} & 4d_{23} \\ 0 & 0 & 0 & d_{41} & d_{55} \end{vmatrix}$$

$\Delta_i (i = (1, \dots, 5))$ — соответствующие алгебраические дополнения, а

$$d_{11} = 4c_2(\omega_0 + c_2); \quad d_{12} = c_4(c_1 + c_2); \quad d_{21} = c_1^2\omega_0 + c_2^2\omega_0 - c^2_4c_2$$

$$d_{23} = -d_{12}; \quad d_{22} = -c_4(2c_2\omega_0 + 2c_2^2 + c_1c_3); \quad d_{33} = -2c_1c_3c_4$$

$$d_{44} = -c_4(3c_1c_3 - 2c_2^2 - 2\omega_0c_2); \quad d_{55} = -4c_4(c_1c_3 - c_2^2 - \omega_0c_2)$$

$$d_1 = -\frac{2c_2\eta}{c_1\omega_0}; \quad d_2 = \frac{(2c_1c_3 - 8c_2^2)\eta}{c_1\omega_0}; \quad d_3 = \frac{6c_2\eta(2c_2^2 - c_1c_3)}{c_1c_4\omega_0}$$

$$d_4 = \frac{2c_2^2\eta(2c_2^2 - 3c_1c_3)}{c_1c_4^2\omega_0}; \quad d_5 = -\frac{2c_2^3\eta}{c_1c_4\omega_0}$$

То есть для $V(y_1, y_2)$ можно записать:

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + A_1 y_1^4 + A_2 y_1^3 y_2 + A_3 y_1^2 y_2^2 + A_4 y_1 y_2^3 + A_5 y_2^4 + \dots \quad (26)$$

а оптимальное управляющее воздействие —

$$u^0(y_1, y_2) = -\frac{c_2}{2\sqrt{c_1}}(2y_1 + 4A_1 y_1^3 + 3A_2 y_1^2 y_2 + 2A_3 y_1 y_2^2 + A_4 y_2^3) - \\ -\frac{c_4}{2\sqrt{c_1}}(2y_2 + A_2 y_1^3 + 2A_3 y_1^2 y_2 + 3A_4 y_1 y_2^2 + 4A_5 y_2^3) + \dots \quad (27)$$

В [2] доказаны сходимость рядов (26) и (27).

Воспользовавшись обозначением (11) и преобразованием (20), т.е.

$$y_1 = \sqrt{c_1} \omega_0 \xi + \frac{c_2}{\sqrt{c_1}} \dot{\xi}$$

$$y_2 = \frac{c_4}{\sqrt{c_1}} \dot{\xi}$$
(28)

получаются выражения для функции Ляпунова $V^0(\xi, \dot{\xi})$ и оптимального управления $u^0(\xi, \dot{\xi})$, зависящие от ξ и $\dot{\xi}$.

Так как $\frac{\partial^4 W}{\partial x^i \partial y^{4-i}}$ ($i=0, \dots, 4$) и $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ принадлежат, по крайней мере, классу L_2 , то полученные ряды по m и n сходятся [3,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек.-М.: Наука, 1972.
2. Альбрехт Э.Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем.- ПММ, 1961, т. 25, вып. 5, с.836-844.
3. Саркисян В.С., Габриелян М.С., Юсиф Д.Ж. Юсиф
 - а) Об оптимальной устойчивости ортотропной прямоугольной пластинки.- Уч. записки ЕГУ, 1987, вып.3, с.37-42.
 - б) К задаче оптимальной устойчивости колебательной ортотропной прямоугольной пластинки.- Уч.записки ЕГУ, 1991, вып.2, с.69-73.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М.: Наука, 1976.

Кафедра теоретической
механики ЕГУ

Поступила в редакцию
17.02.1999