ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №4, 1999 Механика

УДК 539.3

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Гулгазарян Л. Г.

Լ.Գ. Ղուլղազարյան
Օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումների խառը եզրային խնդրի մասին

Դիտարկվում է օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումները, երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ. Ստացված են հաճախությունների հավասարումները, կառուցված են համապատասխան սեփական ֆունկցիաները և ապացուցված է նրանց օրթոգոնալությունը $-h \le y \le h$ հատվածում:

L.G. Ghulghazaryan
The mixed boundary value problem about free vibrations of the orthotropic strip

В работе рассматриваются собственные колебания ортотропной полосы при смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях. Получены уравнения частот, построены собственные функции, доказана их ортогональность на отрезке $-h \le y \le h$

Собственным колебаниям ортотропной полосы посвящены работы [1,2]. В этих работах на продольных сторонах полосы заданы условия I и II краевых задач теории упругости, найдены частоты собственных колебаний и установлены связи между ними и скоростями распространения сейсмических сдвиговых и продольных волн. Случай наличия общей анизотропии рассмотрен в [3]. Собственные колебания двухслойной ортотропной полосы при полном контакте между слоями рассмотрены в [4,5], в [6] найдены частоты собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями.

В данной работе рассматриваются собственные колебания ортотропной полосы $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, l], |y| \le h, h << l\}$ при смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях. Получены уравнения частот, построены собственные функции, доказана их ортогональность на отрезке $-h \le y \le h$.

1. Задача определения частот и форм собственных колебаний сводится к определению решения однородных динамических уравнений плоской задачи теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = a_{66}\sigma_{xy} \qquad (1.1)$$

при начальных

$$u_x = u_{x0}(x,y),\quad u_y = v_{y0}(x,y)$$
$$u'_{xt} = u_{x1}(x,y),\quad u'_{yt} = v_{y1}(x,y) \qquad \text{при} \quad t = 0 \tag{1.2}$$

и граничных условиях

$$\sigma_{yy}(h) = 0,\ \sigma_{xy}(h) = 0,\ \sigma_{xy}(-h) = 0,\ u_y(-h) = 0 \tag{1.3}$$

где ρ – плотность полосы, а a_{ik} – упругие коэффициенты.

Решение уравнений (1.1) ищем в виде

$$\sigma_{xx} = \sigma_{11}(x,y)e^{i\omega t},\ \sigma_{yy} = \sigma_{22}(x,y)e^{i\omega t},\ \sigma_{xy} = \sigma_{12}(x,y)e^{i\omega t}$$
$$u_x = \bar{u}_x(x,y)e^{i\omega t},\ u_y = \bar{u}_y(x,y)e^{i\omega t} \tag{1.4}$$

Перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/l,\ \zeta = y/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u = \bar{u}_x/l,\ v = \bar{u}_y/l$, в результате получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho\omega_*^2 u = 0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho\omega_*^2 v = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial\zeta} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} \tag{1.5}$$
$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial\zeta} + \frac{\partial v}{\partial\xi} = a_{66}\sigma_{12},\quad \omega_*^2 = h^2\omega^2$$

Применив метод асимптотических разложений, решение системы (1.5) ищем в виде

$$Q_{ik} = \sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{q_{ik}+s}Q_{ik}^{(s)} \tag{1.6}$$

где Q_{ik} – любая из искомых величин системы (1.5), q_{ik} характеризуют асимптотические порядки этих величин. Считается, что $Q_{ik}^{(m)} = 0$, если $m < 0$. После подстановки (1.6) в (1.5), получим непротиворечивую систему относительно коэффициентов $Q_{ik}^{(s)}$, если $q_{ik} = -1$ для напряжений, $q_{ik} = 0$ для перемещений. Эта система имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta} + \rho\omega_*^2 u^{(s)} = 0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta} + \rho\omega_*^2 v^{(s)} = 0$$
$$\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{11}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22}^{(s)},\quad \frac{\partial v^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{12}\sigma_{11}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22}^{(s)} \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{66}\sigma_{12}^{(s)}$$

Из системы (1.7) следует

$$\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{A_{11}}\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\zeta} - \frac{1}{A_{12}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi},\ \sigma_{11}^{(s)} = -\frac{1}{A_{12}}\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{1}{A_{22}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_{66}}\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \xi} \tag{1.8}$$

$$A_{11} = \left(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2\right)/a_{11}, A_{12} = \left(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2\right)/a_{12}, A_{22} = \left(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2\right)/a_{22}$$

а для определения функций $u^{(s)}, v^{(s)}$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}\omega^2\rho u^{(s)} = -\frac{\partial^2 v^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{66}\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial \zeta^2} + A_{11}\omega^2\rho v^{(s)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial^2 u^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - A_{11}\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} \tag{1.9}$$

Особый интерес в смысле определения частот собственных колебаний представляет нулевое приближение. При $s=0$ уравнения (1.9) однородны и независимы. Их решения представим в виде

$$u^{(0)} = u_1^{(0)}(\xi)u_0^{(0)}(\zeta), \quad v^{(0)} = v_1^{(0)}(\xi)v_0^{(0)}(\zeta) \tag{1.10}$$

После подстановки (1.10) в (1.9) при $s=0$ получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 u_0^{(0)}}{d\zeta^2} + a_{66}\rho\omega^2 u_0^{(0)} = 0, \quad \frac{d^2 v_0^{(0)}}{d\zeta^2} + A_{11}\rho\omega^2 v_0^{(0)} = 0 \tag{1.11}$$

Решениями которых являются

$$\begin{aligned} u_0^{(0)} &= c_1^{(0)}\sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega.\zeta + c_2^{(0)}\cos\sqrt{a_{66}\rho}\omega.\zeta \\ v_0^{(0)} &= c_3^{(0)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega.\zeta + c_4^{(0)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega.\zeta \end{aligned} \tag{1.12}$$

где $c_i^{(0)}(i=\overline{1,4})$ – произвольные пока постоянные. Подставив (1.10), (1.12) в (1.8), при $s=0$ получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= -1/A_{12}\, v_1^{(0)}(\xi)\sqrt{A_{11}\rho}\omega.[c_3^{(0)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega.\zeta - c_4^{(0)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega.\zeta] \\ \sigma_{22}^{(0)} &= 1/A_{11}\, v_1^{(0)}(\xi)\sqrt{A_{11}\rho}\omega.[c_3^{(0)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega.\zeta - c_4^{(0)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega.\zeta] \\ \sigma_{12}^{(0)} &= 1/a_{66}\, u_1^{(0)}(\xi)\sqrt{a_{66}\rho}\omega.[c_1^{(0)}\cos\sqrt{a_{66}\rho}\omega.\zeta - c_2^{(0)}\sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega.\zeta] \end{aligned} \tag{1.13}$$

Подставив (1.12), (1.13) в граничные условия (1.3), получим две системы

$$\begin{cases} c_1^{(0)}\cos\sqrt{a_{66}\rho}\omega. - c_2^{(0)}\sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega. = 0 \\ c_1^{(0)}\cos\sqrt{a_{66}\rho}\omega. + c_2^{(0)}\sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega. = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} c_3^{(0)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega. - c_4^{(0)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega. = 0 \\ c_3^{(0)}\sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega. - c_4^{(0)}\cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega. = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Из условия существования ненулевых решений систем (1.14), (1.15) вытекают:

$$\sin\sqrt{a_{66}\rho}\omega. = 0 \;\Rightarrow\; \omega._{cn} = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{66}\rho}} = \pi n v_s \;\Rightarrow\; \omega_{cn} = \frac{\pi n v_s}{h}, \quad n \in N \tag{1.16}$$

$$\cos 2\sqrt{A_{11}\rho}\omega. = 0 \;\Rightarrow\; \omega._{pn} = \frac{\pi(2n-1)}{4\sqrt{A_{11}\rho}} = \frac{\pi(2n-1)v_p}{4} \;\Rightarrow$$

$$\omega_{pn} = \frac{\pi(2n-1)v_p}{4h}, \quad n \in N \tag{1.17}$$

где v_s и v_p –известные скорости сейсмических сдвиговых и продольных волн соответственно. Таким образом, из уравнений исходного приближения асимтотического представления определяются частоты собственных колебаний. Учитывая (1.16) и (1.17), будем иметь

$$u_n^{(0)} = C_{2n}^{(0)}(\xi)\cos\pi n\zeta, \quad \sigma_{12n}^{(0)} = -\frac{C_{2n}^{(0)}(\xi)}{a_{66}}\pi n\sin\pi n\zeta$$

$$v_n^{(0)} = \frac{C_{4n}^{(0)}(\xi)}{\cos\frac{\pi(2n-1)}{4}}\cos\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4}$$

$$\sigma_{11n}^{(0)} = -\frac{C_{4n}^{(0)}(\xi)}{4A_{12}\cos\frac{\pi(2n-1)}{4}}\pi(2n-1)\sin\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} \tag{1.18}$$

$$\sigma_{22n}^{(0)} = \frac{C_{4n}^{(0)}(\xi)}{4A_{11}\cos\frac{\pi(2n-1)}{4}}\pi(2n-1)\sin\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4}$$

где $C_{2n}^{(0)}(\xi) = u_1^{(0)}(\xi)c_2^{(0)}, C_{4n}^{(0)}(\xi) = v_1^{(0)}(\xi)c_4^{(0)}$.

Собственные функции $u_{0n}^{(0)}(\zeta)$ и $v_{0n}^{(0)}(\zeta)$ составляют ортогональные системы $\{u_{0n}^{(0)}(\zeta)\}$ и $\{v_{0n}^{(0)}(\zeta)\}$ на отрезке $[-1;1]$, так как легко проверить, что

$$\int_{-1}^{1} u_{0n}^{(0)}(\zeta)u_{0m}^{(0)}(\zeta)d\zeta = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad \int_{-1}^{1} v_{0n}^{(0)}(\zeta)v_{0m}^{(0)}(\zeta)d\zeta = \begin{cases} 2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{1.19}$$

2. Рассмотрим приближения $s > 0$. Решение системы (1.9) будет зависеть от того, какое значение ω_s взято за основу вычислений, надо рассмотреть как частоты сдвиговых собственных колебаний (1.16), так и частоты продольных собственных колебаний (1.17). В результате общее решение системы (1.9) будет иметь вид:

$$u_n^{(s)} = u_1^{(s)}(\xi)(c_{1cn}^{(s)}\sin\sqrt{a_{66}}\rho\omega_{scn}\zeta + c_{2cn}^{(s)}\cos\sqrt{a_{66}}\rho\omega_{scn}\zeta) +$$
$$+ u_1^{(s)}(\xi)(c_{1pn}^{(s)}\sin\sqrt{a_{66}}\rho\omega_{spn}\zeta + c_{2pn}^{(s)}\cos\sqrt{a_{66}}\rho\omega_{spn}\zeta) + \bar{u}_c^{(s)} + \bar{u}_p^{(s)}$$
$$v_n^{(s)} = v_1^{(s)}(\xi)(c_{3cn}^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}}\rho\omega_{scn}\zeta + c_{4cn}^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}}\rho\omega_{scn}\zeta) +$$
$$+ v_1^{(s)}(\xi)(c_{3pn}^{(s)}\sin\sqrt{A_{11}}\rho\omega_{spn}\zeta + c_{4pn}^{(s)}\cos\sqrt{A_{11}}\rho\omega_{spn}\zeta) + \bar{v}_c^{(s)} + \bar{v}_p^{(s)}$$
$$\sigma_{12}^{(s)} = \sqrt{\rho/a_{66}}\omega_{scn}u_1^{(s)}(\xi)(c_{1cn}^{(s)}\cos\sqrt{a_{66}}\rho\omega_{scn}\zeta - c_{2cn}^{(s)}\sin\sqrt{a_{66}}\rho\omega_{scn}\zeta) +$$
$$+ \sqrt{\rho/a_{66}}\omega_{spn}u_1^{(s)}(\xi)(c_{1pn}^{(s)}\cos\sqrt{a_{66}}\rho\omega_{spn}\zeta - \tag{2.1}$$
$$- c_{2pn}^{(s)}\sin\sqrt{a_{66}}\rho\omega_{spn}\zeta) + \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial\bar{u}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{u}_p^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{v}^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$$\sigma_{11}^{(s)} = -\frac{\sqrt{A_{11}\rho}}{A_{12}}\omega_{\cdot cn} v_1^{(s)}(\xi)(c_{3cn}^{(s)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn}\zeta - c_{4cn}^{(s)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn}\zeta) +$$

$$+\frac{1}{A_{22}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\sqrt{A_{11}\rho}}{A_{12}}\omega_{\cdot pn} v_1^{(s)}(\xi)(c_{3pn}^{(s)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot pn}\zeta -$$

$$- c_{4pn}^{(s)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot pn}\zeta) - \frac{1}{A_{12}}\left[\frac{\partial \bar{v}_c^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{v}_p^{(s)}}{\partial \zeta}\right]$$

$$\sigma_{22}^{(s)} = \sqrt{\frac{\rho}{A_{11}}}\omega_{\cdot cn} v_1^{(s)}(\xi)(c_{3cn}^{(s)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn}\zeta - c_{4cn}^{(s)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn}\zeta) -$$

$$-\frac{1}{A_{12}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\rho}{A_{11}}}\omega_{\cdot pn} v_1^{(s)}(\xi)(c_{3pn}^{(s)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot pn}\zeta -$$

$$- c_{4pn}^{(s)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot pn}\zeta) + \frac{1}{A_{11}}\left[\frac{\partial \bar{v}_c^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{v}_p^{(s)}}{\partial \zeta}\right]$$

где $\bar{u}_c^{(s)}, \bar{u}_p^{(s)}, \bar{v}_c^{(s)}, \bar{v}_p^{(s)}$ являются частными решениями соответствующих уравнений (1.9).

Удовлетворив граничным условиям (1.3) и учитывая данные для исходного приближения, получим системы уравнений относительно неизвестных переменных $c_{ij}^{(s)}$, откуда следует, что

$$C_{1pn}^{(s)}(\xi) = -\frac{f^{(s)}(\xi;1) + f^{(s)}(\xi;-1)}{2\cos\sqrt{\rho a_{66}}\omega_{\cdot pn}}, \quad C_{2pn}^{(s)}(\xi) = \frac{f^{(s)}(\xi;1) - f^{(s)}(\xi;-1)}{2\sin\sqrt{\rho a_{66}}\omega_{\cdot pn}}$$

$$C_{3cn}^{(s)}(\xi) = -\frac{\varphi^{(s)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn} + \psi^{(s)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn}}{\cos 2\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn}} \tag{2.2}$$

$$C_{4cn}^{(s)}(\xi) = -\frac{\psi^{(s)} \sin\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn} + \varphi^{(s)} \cos\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn}}{\cos 2\sqrt{A_{11}\rho}\omega_{\cdot cn}}$$

где

$$C_{1pn}^{(s)}(\xi) = u_1^{(s)}(\xi)c_{1pn}^{(s)}, \quad C_{2pn}^{(s)}(\xi) = u_1^{(s)}(\xi)c_{2pn}^{(s)}$$

$$C_{3cn}^{(s)}(\xi) = v_1^{(s)}(\xi)c_{3cn}^{(s)}, \quad C_{4cn}^{(s)}(\xi) = v_1^{(s)}(\xi)c_{4cn}^{(s)}$$

$$f^{(s)}(\xi,\zeta) = \frac{1}{\omega_{\cdot pn}\sqrt{\rho a_{66}}}\left[\frac{\partial \bar{u}_c^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{u}_p^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \xi}\right], \quad \varphi^{(s)}(\xi) = \left[\bar{v}_c^{(s)} + \bar{v}_p^{(s)}\right]\Big|_{\zeta=-1}$$

$$\psi^{(s)}(\xi) = \frac{1}{\omega_{\cdot cn}}\sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}}\left[\frac{1}{A_{11}}\left[\frac{\partial \bar{v}_c^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{v}_p^{(s)}}{\partial \zeta}\right] - \frac{1}{A_{12}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi}\right]\Bigg|_{\zeta=1}$$

После подстановки (2.2) в (2.1) получим

$$u_n^{(s)} = C_{2cn}^{(s)}(\xi)\cos\pi n\zeta + \bar{u}^{(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_{12n}^{(s)} = -\frac{\pi n}{a_{66}} C_{2cn}^{(s)}(\xi)\sin\pi n\zeta -$$

$$-\frac{f^{(s)}(\xi;1)\pi(2n-1)\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\,\pi(2n-1)(1+\zeta)/4)}{4\sqrt{A_{11}a_{66}}\,\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\,\pi(2n-1)/2)} -$$

$$-\frac{f^{(s)}(\xi;-1)\pi(2n-1)\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\,\pi(2n-1)(1-\zeta)/4)}{4\sqrt{A_{11}a_{66}}\,\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\,\pi(2n-1)/2)} +$$

$$+\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial\bar{u}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{u}_p^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$$v_n^{(s)} = \frac{C_{4pn}^{(s)}(\xi)}{\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\cos\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} + \bar{v}^{(s)}(\xi,\zeta) \qquad (2.3)$$

$$\sigma_{11n}^{(s)} = -C_{4pn}^{(s)}(\xi)\frac{\pi(2n-1)}{4A_{12}\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\sin\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} -$$

$$-\frac{1}{A_{12}}\left[\frac{\partial\bar{v}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{v}_p^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{A_{22}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi} +$$

$$+\frac{\pi n}{A_{12}}\sqrt{\frac{A_{11}}{a_{66}}}\,\frac{\psi^{(s)}(\xi)\cos\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n(1+\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n} +$$

$$+\frac{\pi n}{A_{12}}\sqrt{\frac{A_{11}}{a_{66}}}\,\frac{\varphi^{(s)}(\xi)\sin\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n(1-\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n}$$

$$\sigma_{22n}^{(s)} = C_{4pn}^{(s)}(\xi)\frac{\pi(2n-1)}{4A_{11}\cos\dfrac{\pi(2n-1)}{4}}\sin\frac{\pi(2n-1)(1-\zeta)}{4} +$$

$$+\frac{1}{A_{11}}\left[\frac{\partial\bar{v}_c^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar{v}_p^{(s)}}{\partial\zeta}\right] - \frac{1}{A_{12}}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi} -$$

$$-\frac{\pi n}{\sqrt{A_{11}a_{66}}}\,\frac{\psi^{(s)}(\xi)\cos\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n(1+\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n} -$$

$$-\frac{\pi n}{\sqrt{A_{11}a_{66}}}\,\frac{\varphi^{(s)}(\xi)\sin\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n(1-\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\,\pi n}$$

$$\bar{u}^{(s)}(\xi,\zeta) = \frac{f^{(s)}(\xi;1)\cos(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\pi(2n-1)(1+\zeta)/4)}{\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\pi(2n-1)/2)} -$$

$$- \frac{f^{(s)}(\xi;-1)\cos(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\pi(2n-1)(1-\zeta)/4)}{\sin(\sqrt{a_{66}/A_{11}}\pi(2n-1)/2)} + \bar{u}_c^{(s)} + \bar{u}_p^{(s)}$$

$$\bar{v}^{(s)}(\xi,\zeta) = -\frac{\varphi^{(s)}(\xi)\cos\sqrt{A_{11}/a_{66}}\pi n(1-\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\pi n} -$$

$$- \frac{\psi^{(s)}(\xi)\sin\sqrt{A_{11}/a_{66}}\pi n(1+\zeta)}{\cos 2\sqrt{A_{11}/a_{66}}\pi n} + \bar{v}_c^{(s)} + \bar{v}_p^{(s)}$$

где $C_{2cn}^{(s)}(\xi) = u_1^{(s)}(\xi)c_{2cn}^{(s)}$, $C_{4pn}^{(s)}(\xi) = v_1^{(s)}(\xi)c_{4pn}^{(s)}$ должны быть определены из начальных условий (1.2).

3. Изложим процедуру удовлетворения начальным условиям (1.2). Компоненты вектора перемещения запишем следующим образом:

$$u^{(s)} = \left[u_{1n}^{(s)}(\xi)u_{0n}^{(s)}(\zeta) + \bar{u}^{(s)}(\xi,\zeta)\right]\sin\omega_{cn}t + \left[u_{2n}^{(s)}(\xi)u_{0n}^{(s)}(\zeta) + \bar{u}^{(s)}(\xi,\zeta)\right]\cos\omega_{cn}t$$

$$v^{(s)} = \left[v_{1n}^{(s)}(\xi)v_{0n}^{(s)}(\zeta) + \bar{v}^{(s)}(\xi,\zeta)\right]\sin\omega_{pn}t + \left[v_{2n}^{(s)}(\xi)v_{0n}^{(s)}(\zeta) + \bar{v}^{(s)}(\xi,\zeta)\right]\cos\omega_{pn}t \quad (3.1)$$

Здесь происходит суммирование по n.

Удовлетворим начальным условиям (1.2) для $u^{(s)}$

$$u_{2n}^{(s)}(\xi)u_{0n}^{(s)}(\zeta) + \bar{u}^{(s)}(\xi,\zeta) = u_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta)$$

$$u_{1n}^{(s)}(\xi)u_{0n}^{(s)}(\zeta) + \bar{u}^{(s)}(\xi,\zeta) = \frac{1}{\omega_{cn}}u_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta) \quad (3.2)$$

где $u_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta) = \begin{cases} u_{s0}, & s=0 \\ 0, & s>0 \end{cases}$, $u_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta) = \begin{cases} u_{s1}, & s=0 \\ 0, & s>0 \end{cases}$

Разложив функции $u_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta) - \bar{u}^{(s)}(\xi;\zeta)$, $\frac{1}{\omega_{cn}}u_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta) - \bar{u}^{(s)}(\xi;\zeta)$, $u_{0n}^{(s)}(\zeta)$

в ряд Фурье по ортогональной системе $\{u_{0m}^{(0)}(\zeta)\}$ на отрезке [-1;1], по известной процедуре определения коэффициентов Фурье получим

$$u_{2n}^{(s)}(\xi) = a_n^{(s)}(\xi), \qquad u_{1n}^{(s)}(\xi) = b_n^{(s)}(\xi) \quad (3.3)$$

где

$$a_n^{(s)}(\xi) = \int_{-1}^{1}\left[u_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta) - \bar{u}^{(s)}(\xi;\zeta)\right]u_{0n}^{(0)}(\zeta)d\zeta$$

$$b_n^{(s)}(\xi) = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\omega_{cn}}u_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta) - \bar{u}^{(s)}(\xi;\zeta)\right]u_{0n}^{(0)}(\zeta)d\zeta \quad (3.4)$$

Аналогичным образом для $v^{(s)}$ получим

$$v_{2n}^{(s)}(\xi) = c_n^{(s)}(\xi), \qquad v_{1n}^{(s)}(\xi) = d_n^{(s)}(\xi) \quad (3.5)$$

где

$$c_n^{(s)}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[v_\xi^{(0,s)}(\xi;\zeta) - \bar{v}^{(s)}(\xi;\zeta)\right]v_{0n}^{(0)}(\zeta)d\zeta$$

$$d_n^{(s)}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\omega_{pn}}v_\xi^{(1,s)}(\xi;\zeta) - \bar{v}^{(s)}(\xi;\zeta)\right]v_{0n}^{(0)}(\zeta)d\zeta \qquad (3.6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы.- В сб.: Юбил. научн. конф. к 60-летию ГПИ. Гюмри. 1994, с. 23-26.
2. Агаловян М.Л. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии. – Докл. НАНА. 1996, т. 96, №2-4, с.23-28.
3. Агаловян М.Л. О собственных значениях и собственных функциях одного дифференциального оператора. – Уч. записки ЕГУ, 1997, № 2 (187), с. 8-14.
4. Агаловян Л.А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. – В сб.: Труды XVIII Международной конф. по теории оболочек и пластин. РФ. Саратов: 1997, т.1, с. 30-38.
5. Саркисян Л.С. О частотах собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы. – Докл. НАНА, 1997, № 3, с. 19-25.
6. Гулгазарян Л. Г. О характере собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте слоев.-Материалы республиканской конференции молодых ученых. Ереван, 1999, с. 39-44.
7. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. – М.: Наука. Физматлит, 1997. 414 с.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.-М.:Наука, 1977. 415 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.05.1999