ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **52, №2, 1999** Механика

УДК 539.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАГРУЖЕННОЙ ОСЕВОЙ СИЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Гнуни В.В.[*]

Վ.Վ. Գնունի

Առանցքային ուժով բեռնավորված, կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված գլանային թաղանթի պարամետրական տատանումները

Դիտարկված է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված փակ շրջանային գլանային թաղանթի դինամիկ կայունության խնդիրը. Ցույց է տրված, որ հնարավոր է պարամետրական տատանումների գլխավոր տիրույթների միավորում սեփական տատանումների ամենափոքր հաճախականության կրկնապատկված արժեքի և նրան մոտ հարակից ձևերով. սեփական տատանումների կրկնապատկված արժեքների շուրջը.

V.V. Gnuni

Parametric vibrations of a cylindrical shell, made of composite material which is loaded by an axial force

Рассматривается задача динамической устойчивости замкнутой круговой цилиндрической оболочки из композиционного материала. Показывается возможность слияния областей динамической неустойчивости около наименьшей удвоенной частоты и близких к ней удвоенных частот собственных колебаний по смежным формам параметрического возбуждения.

1.Уравнение динамической устойчивости шарнирно опертой по торцам ортотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочки радиуса R, длины l, толщины h, загруженной осевой силой $P(t) = P_0 + P_1 F(t)$ представляется в виде [1−3]

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \Omega_{mn}^2\left[1 - 2\mu_{mn} F(t)\right] w_{mn} = 0 \qquad (1.1)$$

где $w_{mn}(t)$ − коэффициенты разложения функции прогиба $w(x, y, t)$ в двойной тригонометрический ряд в области $0 \le x \le l$, $0 \le y \le 2\pi R$, x − координата по образующей, y − по дуге поперечного сечения, m − число полуволн по длине, n − число волн по окружности, t − время, $|F(t)| \le 1$

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn}\sqrt{1 - \frac{P_0}{P_{mn}^*}}, \quad \mu_{mn} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{P_{mn}^* - P_0} \qquad (1.2)$$

− частота собственных колебаний, загруженной постоянной составляющей осевой силы P_0, μ_{mn} − коэффициент возбуждения

[*] Майор ВС РА Вардан Вардгесович Гнуни (1962−1999гг.) погиб 09.11.1999г. при исполнении служебных обязанностей.

$$\omega_{mn}=\frac{h}{2}\sqrt{\frac{K_{mn}}{3\rho}},\quad P^{*}_{mn}=\frac{\pi R h^{3}}{6}K_{mn} \tag{1.3}$$

— частота собственных колебаний свободной от нагрузки оболочки и собственные значения задачи статической устойчивости оболочки

$$K_{mn}=B_{11}\lambda_m^4+B_3\lambda_m^2\mu_n^2+B_{22}\mu_n^4+\frac{12}{h^2R^2}\frac{\left(B_{11}B_{22}-B_{12}^2\right)\lambda_m^4}{B_{11}\lambda_m^4+B_3'\lambda_m^2\mu_n^2+B_{22}\mu_n^4}$$

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{l},\ \mu_n=\frac{n}{R},\ B_3=2(B_{12}+2B_{66}),\ B_3'=\frac{B_{11}B_{12}-B_{12}^2}{B_{66}}-2B_{12}$$

Если оболочка изготовлена из монослоев ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углом $\pm\varphi$ по оси оболочки, то пакет оболочки в целом можно считать ортотропным. Тогда [4–6]

$$B_{11}=b_1+b_2u+b_3u^2,\ B_{22}=b_1-b_2u+b_3u^2,\ B_{12}=B_{12}^0+b_3(1-u^2)$$

$$B_{66}=B_{66}^0+b_3(1-u^2),\ B_3=2(B_{12}^0+2B_{66}^0)+6b_3(1-u^2) \tag{1.4}$$

$$B_3'=\frac{\left(B_{11}^0B_{22}^0-B_{12}^{0\,2}\right)u^2+\left(B_{11}^0+B_{22}^0+2B_{12}^0\right)B_{66}^0(1-u^2)}{B_{66}^0+b_3(1-u^2)}$$

где

$$u=\cos 2\varphi,\ u\in[-1;1],\ b_1=\frac{1}{4}\left[B_{11}^0+B_{22}^0+2\left(B_{12}^0+2B_{66}^0\right)\right]$$

$$b_2=\frac{1}{2}\left(B_{11}^0-B_{22}^0\right),\ b_3=\frac{1}{4}\left[B_{11}^0+B_{22}^0-2\left(B_{12}^0+2B_{66}^0\right)\right]$$

Если $F(t)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\theta$, где θ — частота возбуждающей силы, то уравнение (1) представляет собой уравнение Хилла [1], а в частном случае, если $F(t)=\cos\theta t$ — уравнение Матье [1,7].

Известно [1,7], что вблизи частот $\theta=2\Omega_{mn}/k$ уравнения Матье-Хилла допускают неограниченно возрастающие решения (области динамической неустойчивости).

Границы первой (главной, $k=1$) области неустойчивости для уравнения Матье определяются формулой

$$\theta_{*i}^{(1)}(u,m,n)=2\Omega_{mn}(u)\sqrt{1+(-1)^i\mu_{mn}(u)}\quad (i=1,2) \tag{1.5}$$

с точностью μ^2.

Ширина последующих $k>1$ областей пропорциональна μ^4 и эти области практически замыкаются при учете затухания колебаний от учета внутреннего трения [1] и при $\mu<<1$.

Любые внешние возмущения на оболочку, то есть начальные условия типа

$$w(x,y,0)=F_1(x,y),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=F_2(x,y)$$

в области $0 \le x \le l$, $0 \le y \le 2\pi R$, можно разложить в двойной тригонометрический ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} F_{imn} \sin\lambda_{mn} x \cos\mu_n y$$

Для конструкции наибольшую опасность представляет возмущение по той форме (m^*, n^*), при которой достигается первая (наименьшая) частота собственных колебаний $\Omega_{m^*n^*}$. Для пластинок и цилиндрических панелей малой кривизны частоты Ω_{mn} располагаются в достаточном отдалении друг от друга.

Следовательно, области неустойчивости (1.5), имеющие ширину $2\mu_{mn}$, не могут пересекаться для различных m, n. В этом случае определение главной области неустойчивости около наименьших частот $\Omega_{m^*n^*}$ исчерпывает практическое зачение рассматриваемой задачи.

Несколько иная ситуация в случае замкнутых цилиндрических оболочек из КМ. В этом случае в зависимости от геометрических и физических параметров оболочки в окрестности $\Omega_{m^*n^*}$ могут располагаться другие частоты Ω_{mn}, мало отличающиеся по величине от $\Omega_{m^*n^*}$. Наблюдается влияние слияния первых областей неустойчивости для различных форм колебаний. Ниже на конкретном примере оболочки анализируется это влияние в зависимости от угла укладки монослоев КМ φ.

2. Пусть сжатая силой $P(t) = P_1 \cos\theta t$ $(P_0 = 0)$ замкнутая круговая цилиндрическая оболочка изготовлена из монослоев однонаправленного боропластика.

Рассматривается оболочка со следующими геометрическими характеристиками:

$$\chi = \frac{12 l^4}{\pi^4 R^2 h^2} = 3617, \quad \frac{l}{\pi R} = 0{,}5$$

и вводятся следующие безразмерные величины.

$$\overline{\omega}_{mn} = \frac{2l^2}{\pi^2 h}\sqrt{\frac{3\rho}{B_{11}^0}}\omega_{mn}, \quad \overline{P} = \frac{6l^2}{\pi^3 B_{11}^0 h^3 R} P, \quad \overline{\theta} = \frac{2l^2}{\pi^2 h}\sqrt{\frac{3\rho}{B_{11}^0}}\theta \tag{2.1}$$

При значениях (2.1) для границ первой (главной) области неустойчивости получаются формулы

$$\overline{\theta}_{*1}^{(1)}(m,n) = 2\sqrt{\overline{\omega}_{mn}^2 - 0{,}5 m^2 \overline{P}_1}, \quad \overline{\theta}_{*2}^{(1)}(m,n) = 2\sqrt{\overline{\omega}_{mn}^2 + 0{,}5 m^2 \overline{P}_1} \tag{2.2}$$

Отметим, что при $P_0 = 0$ получается $\Omega_{mn} = \omega_{mn}$.

Анализ поведения ω_{mn} в зависимости от $\varphi \in [0; 90^0]$ показывает, что наименьшее значение ω_{mn} достигается при

$$m^*; n^* = \begin{cases} 1;6 & \text{при} \quad 0^0 \le \varphi \le 35^0 \\ 1;5 & \text{при} \quad 35^0 < \varphi \le 50^0 \\ 1;4 & \text{при} \quad 50^0 < \varphi \le 90^0 \end{cases}$$

и, следовательно, около этих форм колебаний, а также соседних с ними, первые области неустойчивости сливаются и фактически реальная область неустойчивости получается намного шире.

При этих данных на фиг.1 приведены кривые зависимости критических частот главной области неустойчивости от угла укладки монослоев по толщине оболочки. Кривая 2 соответствует $2\overline{\omega}_{m^*n^*}$, причем, m^*, n^*, при которых достигается $\min\overline{\omega}_{mn}$, зависят от φ. Кривая 1 определяет нижнюю границу первой области неустойчивости и определяется соотношением

$$\overline{\theta}_{*1}^{(1)}(m^*,n^*) = 2\sqrt{\overline{\omega}_{m^*n^*}^2 - 0{,}5(m^*)^2\,\overline{P}_1}$$

Кривая 3 определяет верхнюю границу первой области неустойчивости, соответствующую m^*, n^* для каждого φ

$$\overline{\theta}_{*2}^{(1)}(m^*,n^*) = 2\sqrt{\overline{\omega}_{mn}^2 + 0{,}5(m^*)^2\,\overline{P}_1}$$

Таким образом, кривые 1 и 3 ограничивают главную область неустойчивости, расположенной около удвоенного значения $(k = 1)$ первой (наименьшей по m, n) частоты собственных колебаний, что и определяется для изотропных [1], анизотропных [2, 3] оболочек в известных нам работах. Однако, как было указано выше, для каждого φ около $\omega_{m^*n^*}$, в случае замкнутой круговой оболочки из КМ, располагаются близкие по значению другие собственные частоты. Первые (главные) области неустойчивости около удвоенных значений этих частот сверху пересекаются с областью между кривыми 1 и 3 и фактически расширяют первую область динамической неустойчивости. Для наглядности в табл. 1 приведены значения границ главной области неустойчивости для различных m, n и некоторых значений φ, приводятся также значения $2\overline{\omega}_{mn}$. Необходимо отметить, что на фиг.1 приведены лишь главные области около $2\overline{\omega}_{mn}$, которые непосредственно пересекаются и составляют сплошную область между кривыми 1 и 4. Выше кривой 4, на достаточно близком расстоянии от нее и друг от друга располагаются первые области потери утойчивости и по другим формам.

Таким образом, учитывая равновозможность внешних возмущений по любым формам (m, n), можно считать, что при $\varphi\in[0;90^0]$ расчетной для частот внешней силы является кривая 1. Оптимальным, в смысле динамической устойчивости, можно считать проект, для которой

$$\overline{\theta}_0 = \min_{m,n}\overline{\theta}_{1*}^{(1)}(m,n,\varphi)\xrightarrow[\varphi]{}\max \tag{2.3}$$

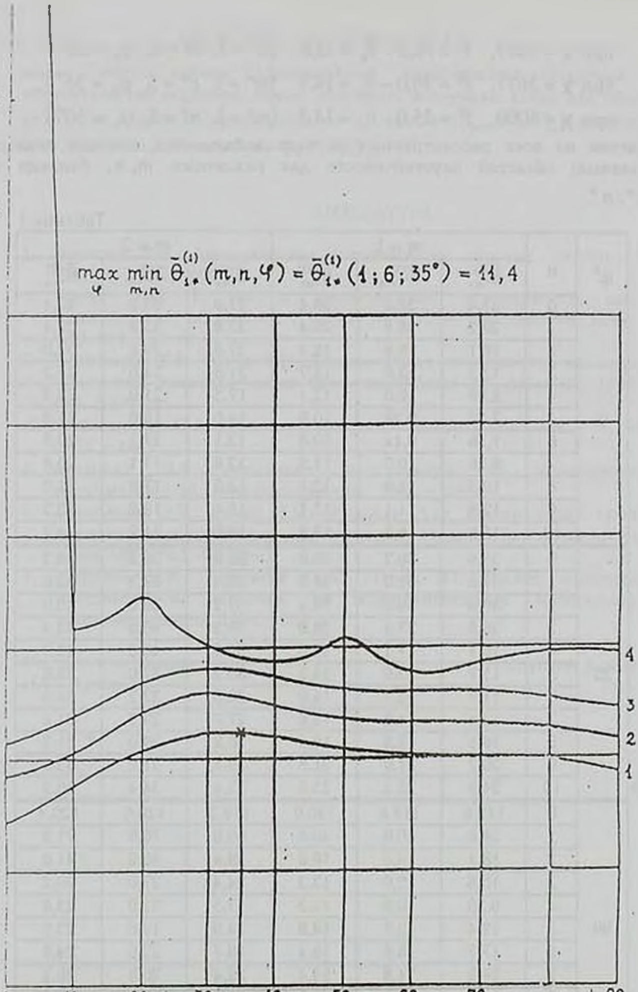
В заключение приводим значение θ_0 для некоторых значений $\overline{P}$

$\overline{P} = 16{,}2 \quad \overline{\theta}_0 = 11{,}4 \quad (m^* = 1,\ n^* = 6,\ \varphi_0 = 35^0)$

$\overline{P} = 20 \quad \overline{\theta}_0 = 11{,}2 \quad (m^* = 1,\ n^* = 6,\ \varphi_0 = 35^0)$

$\overline{P} = 25 \quad \overline{\theta}_0 = 10{,}6 \quad (m^* = 1,\ n^* = 6,\ \varphi_0 = 35^0)$

Для оболочки из монослоев однонаправленного стеклопластика при $l/\pi R = 0{,}5$ получается



$\max\limits_{\varphi} \min\limits_{m,n} \bar{\theta}^{(1)}_{1*}(m,n,\varphi) = \bar{\theta}^{(1)}_{1*}(1;6;35^\circ) = 11,4$
40
35
30
25
20
15
10
5
0
10
20
30
40
50
60
70
90
φ°
4
3
2
1

Фиг. 1

при $\chi = 3617$, $\overline{P} = 16{,}2 - \overline{\theta}_0 = 15{,}8$ $\left(m^* = 1,\ n^* = 5,\ \varphi_0 = 35^0\right)$

при $\chi = 3617$, $\overline{P} = 30{,}0 - \overline{\theta}_0 = 14{,}9$ $\left(m^* = 1,\ n^* = 5,\ \varphi_0 = 35^0\right)$

при $\chi = 3000$, $\overline{P} = 25{,}0 - \overline{\theta}_0 = 14{,}3$ $\left(m^* = 1,\ n^* = 5,\ \varphi_0 = 30^0\right)$

причем во всех рассмотренных случаях наблюдается слияние первых (главных) областей неустойчивости для различных m, n, близких к m^*, n^*.

Таблица 1

φ^0	n	$m=1$			$m=2$		
		$\overline{\theta}^{(1)}_{*mn}$	$2\overline{\omega}_{mn}$	$\overline{\theta}^{(2)}_{*mn}$	$\overline{\theta}^{(1)}_{*mn}$	$2\overline{\omega}_{mn}$	$\overline{\theta}^{(2)}_{*mn}$
0	0	37,4	38,0	38,4	37,0	38,8	40,4
	1	28,2	28,8	29,4	33,8	35,8	37,4
	2	18,1	18,9	19,8	27,6	29,8	32,0
	3	12,3	13,6	14,7	21,8	24,6	27,2
	4	8,98	10,6	12,1	17,5	21,0	23,8
	5	7,32	9.28	10,9	14,6	18,6	21,8
	6	7,16	9,14	10,8	13,1	17,3	20,8
	7	8,28	10,0	11,5	12,8	17,1	20,6
	8	10,3	11,8	13,1	13,6	17,8	21,0
	9	12,9	14,1	15,2	15,4	19,2	22,2
	10	15,8	16,8	17,8	18,0	21,2	24,2
35	0	35,6	36,2	36,6	35,0	36,6	38,2
	1	37,8	38,2	38,8	35,4	37,2	39,0
	2	38,6	39,0	39,4	37,2	39,0	40,6
	3	26,8	27,4	28,0	39,2	40,8	42,4
	4	16,1	17,1	18,0	39,0	40,6	42,2
	5	11,7	13,0	14,2	35,2	37,0	38,6
	6	11,4	12,7	14,0	30,0	32,2	34,0
	7	13,4	14,6	15,6	27,0	29,2	31,4
	8	16,5	17,5	18,4	26,8	29,0	31,2
	9	20,2	21,0	21,8	28,8	31,0	33,0
	10	24,6	25,2	25,8	32,4	34,4	36,2
90	0	119,6	119,8	120,0	119,2	120,0	120,4
	1	39,6	40,0	40,4	69,8	70,6	71,6
	2	18,1	19,0	19,8	38,4	40,2	41,8
	3	10,6	12,0	13,3	24,4	27,0	29,2
	4	9,30	10,9	12,3	17,5	21,0	23,8
	5	12,4	13,7	14,8	14,9	19,6	22,6
	6	17,7	18,6	19,4	18,7	22,0	24,6
	7	24,2	24,8	25,4	22,4	26,8	29,2
	8	31,8	32,2	32,8	31,6	33,6	35,6
	9	40,4	40,8	41,2	40,2	41,8	43,2
	10	49,8	50,2	50,6	49,8	51,0	52,4

В заключение отметим, что для углов укладки монослоев, близких к $\varphi = 0$, практически сливаются все первые $\left(\overline{\theta} \sim 2\overline{\omega}_{mn}\right)$ области неустойчивости и фактически начиная с

$$\min_{m,n} \bar{\theta}_{1*}^{(1)}(m,n,\varphi) \quad (0 \le \varphi < 10^{0})$$

имеет место потеря динамической устойчивости оболочки. Это обстоятельство особенно важно учитывать в случаях, когда для оболочки активным является ограничение на прочность ($P_{расч} = P_{пр}$) и оптимальный угол укладки монослоев $\varphi_0 = (\varphi_0)_{пр} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1956. – 600 с.
2. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек. – Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат.наук, 1960, т.13, №1, с.47-58.
3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Динамическая устойчивость анизотропной замкнутой цилиндрической оболочки. – Докл. АН Арм.ССР, 1965, т.41, №5, с.278-281.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
5. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 269 с.
6. Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц., Кизокян Л.О. Оптимизация прочности анизотропных пластин в закритической стадии. Проблемы прочности, Киев, 1977, №3. – С.59-62.
7. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластинок и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 263 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.12.1999