ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **52, №4, 1999** Механика

УДК 539.3

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕКОТОРЫХ ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Саакян С. Г.

Որոշ ուղղաձիգ- անհամասեռ կիսատարածությունների ազատ տատանումների մասին
Ս. Գ. Սահակյան

Ուսումնասիրված է ուղղաձիգ-անհամասեռ առաձգական կիսատարածության ազատ տատանումների խնդիրը, երբ միջավայրի Լամեի գործակիցները և խտությունը կախված խորությունից փոփոխված են քառակուսային, հիպերբոլական սինուսի և կոսինուսի կամ եռանկյունաչափական սինուսի և կոսինուսի գծային կոմբինացիաների քառակուսու օրենքներով.

Ստացված է մակերևույթային ալիքների դիսպերսիոն հավասարումը. Այնուհետև ուսումնասիրված է անհամասեռության ազդեցությունը մակերևույթային ալիքների ֆազային արագության վրա:

S. G. Sahakyan
The free oscillations of some vertical-inhomogeneous elastic halfspace

Рассматриваются свободные колебания некоторых вертикально-неоднородных упругих полупространств. Получено дисперсионное уравнение поверхностных волн и показано, что они могут появляться, начиная с некоторой пороговой частоты, характерной для неоднородной среды. Исследовано влияние неоднородности среды на фазовую скорость поверхностных волн

В настоящей работе рассматриваются свободные колебания некоторых вертикально-неоднородных упругих полупространств, свойства которых удовлетворяют определенному условию, которое получается после некоторых преобразований уравнения упругости в перемещениях.

Было показано, что свободные колебания этих неоднородных сред являются дисперсионными поверхностными волнами, которые могут появляться, начиная с некоторого порога частоты, характерной для неоднородной среды. Показано также, что при низких (сейсмических) частотах неоднородность существенно влияет на фазовую скорость, а при высоких частотах фазовая скорость очень близка к скорости Рэлея в однородной упругой среде, соответствующей неоднородной .

Полученные результаты могут быть использованы для оценки опасных резонансных частот сейсмоустойчивых зданий и других наземных сооружений.

1. В уравнении движения неоднородной упругой среды в общем случае упругие коэффициенты Ламе λ, μ и плотность среды ρ являются функциями пространственных координат. Полагаем, что $\lambda = \mu$ и в прямоугольной системе координат $x\,y\,z$ упругие коэффициенты Ламе и плотность среды являются функциями только координаты z. Тогда,

предполагая, что скорости распространения фронтов объемных волн постоянны, т. е.

$$c_d^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = 3\frac{\mu}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} = \text{const} \tag{1.1}$$

получим

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = p(z) \tag{1.2}$$

Фактически, рассматривается задача о свободных колебаниях вертикально-неоднородных упругих полупространств.

Не ограничивая по существу общность задачи, примем, что упругие колебания происходят в плоскости oxz, т. е. $\vec{u}\{u(x,z,t), o, w(x,z,t)\}$ и среда занимает область $z \geq z_0$. В этом случае для компонентов вектора перемещения имеем систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right] = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

На границе полупространства напряжения равны нулю. Используя закон Гука, граничные условия можно записать в виде: при $z = z_0$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.5}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.6}$$

Свободные колебания вертикально-неоднородных упругих полупространств представим в виде

$$u(x,z,t) = f(z)\exp[i(kx - \omega t)] \tag{1.7}$$

$$w(x,z,t) = g(z)\exp[i(kx - \omega t)] \tag{1.8}$$

соответствующие распространению вдоль положительной оси x синусоидальной волны с частотой ω и волновым числом k. Подставляя (1.7) и (1.8) в уравнения (1.3) и (1.4), получим следующую систему дифференциальных уравнений для определения функций $f(z)$ и $g(z)$:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{p'}{p}\frac{df}{dz} - 3(k^2 - k_1^2)f + 2ik\frac{dg}{dz} + \frac{ikp'}{p}g = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{d^2 g}{dz^2} + \frac{p'}{p}\frac{dg}{dz} - \frac{1}{3}(k^2 - k_2^2)g + \frac{2ik}{3}\frac{df}{dz} + \frac{ikp'}{p}f = 0 \tag{1.10}$$

где

$$k_1 = \frac{\omega}{c_d} = \frac{\omega}{\sqrt{3}c_s}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_s} \tag{1.11}$$

Система уравнений (1.9) и (1.10) заменой переменных

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{p(z)}}\varphi(z); \quad g(z)=\frac{1}{\sqrt{p(z)}}\psi(z) \tag{1.12}$$

записывается в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}-3n_1^2\varphi+2ik\frac{d\psi}{dz}=0 \tag{1.13}$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}-\frac{1}{3}n_2^2\psi+\frac{2ik}{3}\frac{d\varphi}{dz}=0 \tag{1.14}$$

где

$$n_1^2=k^2-k_1^2+\frac{1}{3}K\left(\frac{p'}{p}\right), \quad n_2^2=k^2-k_2^2+3K\left(\frac{p'}{p}\right) \tag{1.15}$$

$$K\left(\frac{p'}{p}\right)=\left(\frac{p'}{2p}\right)'+\left(\frac{p'}{2p}\right)^2 \tag{1.16}$$

Параметры вертикально-неоднородных упругих сред определим условием

$$\left(\frac{p'}{2p}\right)'+\left(\frac{p'}{2p}\right)^2=\nu=\text{const} \tag{1.17}$$

где ν - произвольная постоянная.

Условие (1.17) является нелинейным дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $p(z)$. Решение уравнения (1.17) при начальном условии $p(z_0)=1$, $p'(z_0)=p'_0$ определяет следующие вертикально-неоднородные упругие среды:

A) $$\frac{\mu}{\mu_0}=\frac{\rho}{\rho_0}=\left[1+\frac{p'_0}{2}(z-z_0)\right]^2 \quad \text{при} \quad \nu=0 \tag{1.18}$$

B) $$\frac{\mu}{\mu_0}=\frac{\rho}{\rho_0}=\left[\operatorname{ch}\frac{z-z_0}{h}+\frac{1}{2}hp'_0\operatorname{sh}\frac{z-z_0}{h}\right]^2 \quad \text{при} \quad \nu=\frac{1}{h^2} \tag{1.19}$$

C) $$\frac{\mu}{\mu_0}=\frac{\rho}{\rho_0}=\left[\cos\frac{z-z_0}{h}+\frac{1}{2}hp'_0\sin\frac{z-z_0}{h}\right]^2 \quad \text{при} \quad \nu=-\frac{1}{h^2} \tag{1.20}$$

2. Во всех случаях рассмотренных вертикально - неоднородных упругих сред решение системы (1.9) и (1.10), экспоненциально убывающее с ростом расстояния от свободной поверхности, определяет по (1.7) и (1.8) компоненты вектора перемещения:

$$u=\frac{1}{\sqrt{p(z)}}\left\{A\exp\left[-(z-z_0)N_1\right]+B\exp\left[-(z-z_0)N_2\right]\right\}\exp\left[i(kx-\omega t)\right] \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} w=\frac{i}{2k\sqrt{p(z)}}\Bigg\{&\frac{3n_1^2-N_1^2}{N_1}A\exp\left[-(z-z_0)N_1\right]+\\ &+\frac{3n_2^2-N_2^2}{N_2}B\exp\left[-(z-z_0)N_2\right]\Bigg\}\exp\left[i(kx-\omega t)\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

где A и B - произвольные постоянные,

$$N_{1,2}^2 = k^2 - 2k_1^2 + \nu \pm N_\nu, \quad N_\nu = k_1^4 - \frac{4\nu}{3}k^2 \tag{2.3}$$

Ветви радикалов N_1, N_2 и N_ν определяются условиями существования поверхностных волн:

$$\arg N_i = 0 \quad (i = 1,2,\nu) \text{ при } k_1^4 - \frac{4\nu}{3}k^2 > 0 \text{ и } k^2 - 2k_1^2 + \nu \pm N_\nu > 0 \tag{2.4}$$

Подставляя выражения для u и w в граничные условия (1.5) и (1.6), приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно A и B:

$$\left(\frac{3n_1^2 + N_1^2}{N_1} + p_0^{\cdot}\right)A + \left(\frac{3n_1^2 + N_2^2}{N_2} + p_0^{\cdot}\right)B = 0 \tag{2.5}$$

$$\left|4k^2 + \frac{3}{N_1}\left(N_1^2 - 3n_1^2\right)\left(2N_1 + p_0^{\cdot}\right)\right|A - \left|4k^2 + \frac{3}{N_2}\left(N_2^2 - 3n_2^2\right)\left(2N_2 + p_0^{\cdot}\right)\right|B = 0 \tag{2.6}$$

При условии существования нетривиального решения системы (2.5) и (2.6) получается дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned}&\left[4k^2 - 5k_1 + 2\nu - N_\nu + p_0^{\cdot}N_2\right]\left[2\left(4k^2 - k_2^2 - 3N_\nu\right)N_1 + 3p_0^{\cdot}\left(2k^2 - k_1^2 - N_\nu\right)\right] - \\ &- \left[4k^2 - 5k_1 + 2\nu - N_\nu + p_0^{\cdot}N_1\right]\times \\ &\times\left[2\left(4k^2 - k_2^2 - 3N_\nu\right)N_2 + 3p_0^{\cdot}\left(2k^2 - k_1^2 - N_\nu\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{2.7}$$

Это уравнение при $\nu = 0$ и $p_0^{\cdot} = 0$ переходит в известную функцию Рэлея [1,2]

$$R(\xi) = \left(2 - \xi^2\right)^2 - 4n_d n_s = 0 \tag{2.8}$$

где

$$n_d^2 = 1 - \xi^2, \; n_s^2 = 1 - \xi^2/3, \; \xi = \frac{v}{c_s}, \; v = \frac{\omega}{k} \tag{2.9}$$

Уравнение (2.8) разлагается на множители

$$\left(n_d n_s - 1\right)\left(3n_d n_s - 1\right) = 0 \tag{2.10}$$

Откуда следует , что оно имеет единственный положительный корень

$$c_R = c_s\sqrt{\frac{2}{3}\left(3 - \sqrt{3}\right)} \approx 0{,}9194c_s \tag{2.11}$$

который есть известная скорость поверхностных волн Рэлея в однородной среде.

Рассмотрим решения (2.7) при любых значениях параметров ν и $p_0^{\cdot} > 0$, определяющие фазовую скорость поверхностных волн в неоднородной среде.

Вводя в (2.7) безразмерную частоту $\Omega = 2\omega/c_s p_0^{\cdot}$, имеем

$$\begin{aligned}&\left[12 - 5\xi^2 - H_l + 6l\xi^2\Omega^{-2} + 2\xi\Omega^{-1}B_2\right]\left[\left(4 - \xi^2 - H_l\right)B_1 + \right. \\ &\left. + 3\xi\Omega^{-1}\left(6 - \xi^2 - H_l\right)\right] - \left[12 - 5\xi^2 + H_l + 6l\xi^2\Omega^{-2} + 2\xi\Omega^{-1}B_1\right]\times\end{aligned}$$

$$\times\left[\left(4-\xi^2+H_l\right)B_2+3\xi\Omega^{-1}\left(6-\xi^2+H_l\right)\right]=0 \qquad (2.11)$$

где введены обозначения

$$B_{1,2}^2=9-6\xi^2+9l\xi^2\Omega^{-2}\pm 3H_l, \quad H_l^2=\xi^2\left(\xi^2-12l\Omega^{-2}\right), \quad l=\frac{4\nu}{p_0'^2} \qquad (2.12)$$

а) Упругая среда имеет неоднородность вида A, тогда $l=0$, $p_0'>0$. Дисперсионное уравнение (2.11) после ряда математических преобразований можно представить в виде

$$\begin{gathered}\left(n_d n_s-1\right)\left[2\left(3+2\sqrt{3}\right)n_d+2n_s+\left(3+\sqrt{3}\right)p_0'\xi\Omega^{-1}\right]\times\\ \times\left[2\left(3-2\sqrt{3}\right)n_d+2n_s+\left(3-\sqrt{3}\right)p_0'\xi\Omega^{-1}\right]=0\end{gathered} \qquad (2.13)$$

которое имеет единственный положительный корень

$$\frac{c_R}{c_s}=\Omega\left\{\frac{1}{3}\Omega^2+\frac{1}{4}\left[\frac{2+\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{16\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}\Omega^2+3p_0'^2}-\frac{3}{4}p_0'\right]^2\right\}^{-1/2} \qquad (2.14)$$

при частотах $\Omega\geq\Omega_0$, где $\Omega_0=0{,}5\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}$ есть пороговая частота появления поверхностных волн

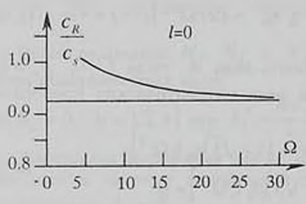
Таким образом, поверхностные волны в неоднородной упругой среде типа A, в отличие от однородной, являются дисперсионными и могут существовать, начиная с некоторой пороговой частоты Ω_0. В этом случае, фазовая скорость принимает свое максимальное значение c_s при $\Omega=\Omega_0$ и далее монотонно убывает в интервале существования поверхностных волн $\left[\Omega_0,+\infty\right)$. При $\Omega\to\infty$ (2.14) имеет неопределенность вида ∞/∞. Она легко раскрывается и дает

$$\lim_{\Omega\to\infty}\frac{c_R}{c_s}=\sqrt{\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\right)} \qquad (2.15)$$

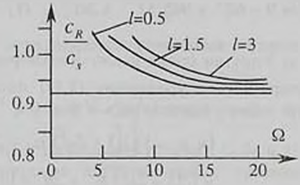
Следовательно, при высоких частотах поверхностные волны в вертикально-неоднородном полупространстве распространяются как волны Рэлея и для фазовой скорости всегда имеет место неравенство $c_s\sqrt{\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}<c_R\leq c_s$. На фиг. 1 приведен график зависимости безразмерной фазовой скорости поверхностных волн от безразмерной частоты.

б) Упругая среда имеет неоднородность вида B, тогда $l>0$, $p_0'>0$. В этом случае дисперсионное уравнение (2.11) численно анализировано и установлено, что начиная с некоторой частоты Ω_l^*, оно имеет единственный положительный корень, который определяет скорость распространения поверхностных волн в неоднородной среде вида B. Она принимает свое максимальное значение c_R^0 при Ω_l^0, монотонно убывая в интервале $\left[\Omega_l^0,+\infty\right)$, стремится к скорости Рэлея в однородной среде при $\Omega\to+\infty$.

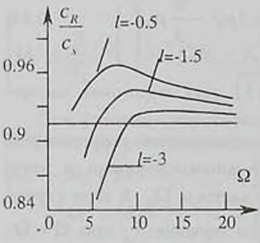
Как видно из фиг.2, порог частоты Ω_l^0 существенно зависит от l и возрастает при возрастании l.



Фиг.1



Фиг.2



Фиг. 3

в) Упругая среда имеет неоднородность вида C, тогда $l < 0$, $p_0 > 0$. В этом случае фазовая скорость принимает некоторое значение $c_R^0 < c_s$ при пороговой частоте Ω_l^0 и возрастая в некотором интервале $[\Omega_l^0, \Omega_l^*)$, достигает своего максимального значения c_R^* при Ω_l^*. Далее она монотонно убывает в интервале $[\Omega_l^*, +\infty)$ и при $\Omega \to +\infty$ стремится к скорости Рэлея в однородной среде (фиг. 3).

Интересно отметить, что при некоторых значениях l в некотором узком интервале частот получается $c_R > c_s$, и этот результат, несомненно, нуждается в экспериментальной проверке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh J. W. On waves propagated along the plane surface of an elastic soid.-Proc. London Math. Soc., 1885, v.17, № 253, p. 4-11.
2. Maugin G. A. Elastic surface waves with transverse horizontal polarization. Advances in Appl. Mech., 1983, v. 23, p. 373-434.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 17.02.1999