ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №3, 1999 Механика
УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК

Гнуни В.Ц.

Վ.Ց. Գնունի
Առաձգական սալերի հաշվարկային մոդելների մասին մի քանի դատողություններ

Աշխատանքում բերվում են մի քանի պարզագույն օրինակներ, որոնք ցույց են տալիս, որ չի կարող լինել սալերի հաշվարկի համընդհանուր մոդել: Հաշվարկի յուրաքանչյուր մեթոդ, որը թույլ է տալիս առաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումների ինտեգրումը ըստ ընդլայնական կոորդինատի, բնականաբար ունի իր կիրառության սահմանները, և այդ սահմանների որոշումն պետք է հանդիսանա հետագա ուսումնասիրությունների առարկան:

V.Ts. Gnuny
Some Considerations on the Computational Models of the Elastic Plates

В статье на простейших примерах показывается, что в теории пластинок не может быть всеобъемлющей расчетной модели. Каждая расчетная модель, позволяющая интегрирование трехмерных уравнений теории упругости по поперечной координате, естественно имеет свои пределы применимости, и определение этих пределов является предметом необходимых дальнейших исследований.

Как принято, пластинкой называется цилиндрическое, в частности, призматическое тело, высота (толщина) которого h существенно меньше от других размеров в плоскости направляющей.

Вышеприведенное определение характеризует лишь геометрию пластинки. Однако, положенные в основу методов расчета тонких пластинок предположения имеют физический характер.

1. Предположения о поперечных деформациях

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad e_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad e_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \qquad (1.1)$$

и о пренебрежении в первых двух уравнениях обобщенного закона Гука влиянием поперечного нормального напряжения σ_{33} по сравнению с нормальными напряжениями σ_{11}, σ_{22}, приводят к классической модели расчета на изгиб тонких пластинок (теория Кирхгофа - 1850 год).

Гипотезы (1.1) имеют простую геометрическую интерпретацию. Нормальный к срединной плоскости $(x_3 = 0)$ линейный элемент после деформации остается нормальным к деформированной срединной плоскости и не меняет свою длину. Фактически изотропное тело заменяется некоторой моделью трансверсально-изотропного тела [1].

$$e_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{33}, \qquad e_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{33}$$

$$e_{33} = \frac{1}{E'}\sigma_{33} - \frac{\nu'}{E'}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \; e_{23} = \frac{1}{G'}\sigma_{23}, \; e_{13} = \frac{1}{G'}\sigma_{13}, \; e_{12} = \frac{1}{G}\sigma_{12} \quad (1.2)$$

для которого поперечные характеристики упругости

$$E' \to \infty, \; G' \to \infty \quad (1.3)$$

причем из условия $E\nu' = E'\nu''$ следует, что $\nu'' \to 0$.

Здесь и в дальнейшем все обозначения общепринятые [1-4].

Из (1.2), при (1.3) следует

$$e_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \; e_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \; e_{12} = \frac{1}{G}\sigma_{12}$$

$$e_{33} = 0, \; e_{13} = 0, \; e_{23} = 0 \quad (1.4)$$

что совпадает с результатом классической теории пластинок [2-3].

Из (1.2), (1.4) следует, что если материал тела на самом деле трансверсально-изотропный (ортотропный), то при $E/E', G/G'$ (для ортотропного тела E_1/E_3, E_2/E_3, G_{12}/G_{13}, G_{12}/G_{23}) меньше единицы, ошибка, вносимая классической теорией, уменьшается, а при $E/E' > 1, G/G' > 1$ – увеличивается монотонно с увеличением этих отношений. При $E/E' >> 1, G/G' >> 1$ область применения классической теории пластинок существенно уменьшается [1].

Расчетные модели пластинок, учитывающие податливость материала тела в поперечном направлении (уточненные теории) фактически позволяют увеличить возможные значения относительной толщины и расширить класс рассматриваемых задач [5,6].

2. Однако, при расчетах пластинок, уточненные теории, содержащие поправки к классической теории порядка h^2/a^2 для изотропных пластинок и $Eh^2/G'a^2$ для трансверсально-изотропных пластинок, должны применяться с некоторой осторожностью.

В подтверждение вышесказанного рассмотрим пример задачи устойчивости длиной ($b >> a$) прямоугольной пластинки толщины h, сжатой продольным усилием P.

По классической и уточненной [1] теориям критические усилия трансверсально-изотропной пластинки суть

$$P^*_{\text{кл}} = P_0 = D\frac{\pi^2}{a^2}, \quad P^*_{\text{ут}} = \frac{P_0}{1 + \dfrac{\pi^2 Eh^2}{10(1-\nu^2)G'a^2}} \quad (2.1)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – жесткость на изгиб.

Критическое усилие той же пластинки, определенное с учетом деформаций начального состояния e^0_{11}, e^0_{33}, то есть с учетом изменения ширины и толщины пластинки до потери устойчивости, суть

$$P^* = \frac{P_0}{1 - \dfrac{(2+3\nu'')\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)a^2}} \quad (2.2)$$

Здесь в случае изотропной пластинки $E/G' = 2(1+\nu)$, $\nu'' = \nu$. При $\nu = 0{,}3$, $h/a = 0{,}2$

$$P^{*}_{\text{ут}} = 0{,}898P_0, \quad P^{*} = 1{,}117P_0$$

и очевидно, что при совместном учете влияния поперечных сдвигов и деформаций e^0_{11}, e^0_{22} начального состояния классическая теория уравновешена и для изотропной пластинки практически $P^{*}_{\text{кр}} = P_0$.

В случае же трансверсально-изотропных пластинок удельный вес поправочного члена в (2.1) увеличивается с увеличением отношения E/G' и приобретает доминирующее значение по сравнению с поправкой, связанной с учетом начальных деформаций.

3. Рассмотрим другой простейший пример. Пусть замкнутая круговая цилиндрическая оболочка с размерами l, R, h и со свободными торцами загружена внутренним давлением q.

По безмоментной теории отличное от нуля напряжение

$$\sigma^0_{22} = Rqh \tag{3.1}$$

Если учесть увеличение радиуса на величину qR^2/Eh и уменьшение толщины приближенно на $\nu qR/h$, то

$$\sigma_{22} = \sigma^0_{22}\left(1 + \frac{qR}{Eh}\right)\left(1 - \frac{\nu qR}{Eh}\right)^{-1} \tag{3.2}$$

Здесь поправка от учета изменения R, h имеет порядок R/h, что указывает на необходимость более осторожного применения методов, основанных на разложениях по малому параметру h/R.

4. Известно [4], что с уменьшением относительной толщины пластинки h/c, где $c = \min(a, b)$, увеличивается допустимое значение (предельное значение) относительного прогиба w/h. Изгиб шарнирно опертой по четырем краям квадратной пластинки ($a = b$), загруженной постоянным давлением q, в первом приближении, при $\nu = 0{,}3$, описывается уравнением

$$2{,}51\bar{f} + \bar{f}^3 = \bar{q} \tag{4.1}$$

где $\bar{f} = f/h$, $\bar{q} = 9a^4q/8\pi^2h^4E$, f – прогиб в центре пластинки.

Здесь, при $f \sim h$, влияние второго слагаемого в левой части существенно. Линейные уравнения расчета тонких пластинок, основанные на малости относительной толщины, могут привести к значительным погрешностям, т.к. для достаточно малых толщин уравнения равновесия и геометрические соотношения становятся нелинейными (гибкая пластинка) [4].

Например, для предельного состояния квадратной пластинки из высокопрочной стали, при уровне допустимого напряжения $\sigma_* = E/200$, получается

$$q_* = 35{,}1\,\text{кГ/см}^2, \quad f_* = 0{,}570 \quad \text{при} \quad h = a/30$$

$$q_* = 21{,}1\,\text{кГ/см}^2, \quad f_* = 0{,}919 \quad \text{при} \quad h = a/40$$

$$q_* = 15{,}4\ \text{кГ/см}^2,\quad f_* = 1{,}30\quad \text{при}\quad h = a/50$$

где q_*, f_* - соответствующие предельные значения постоянного давления q, и максимального прогиба (прогиб в центре) f.

В линейной постановке в рассматриваемом примере получается

$$q_* = 34{,}5\ \text{кГ/см}^2,\ f_* = 0{,}698\ \text{при}\quad h = a/30$$

$$q_* = 19{,}5\ \text{кГ/см}^2,\ f_* = 1{,}14\quad \text{при}\quad h = a/40$$

$$q_* = 12{,}5\ \text{кГ/см}^2,\ f_* = 1{,}77\quad \text{при}\quad h = a/50$$

Здесь ошибка в несущей способности, вследствие неучета нелинейности, становится значительным при $h/a \geq 1/40$ и составляет 7,7% при $h = a/40$ и 19% при $h = a/50$. Ошибка для предельного значения максимального прогиба значительна уже при $h = a/30$ и составляет 22,5%.

Таким образом, линейная классическая теория, основанная на существенной малости отношения h/a, правомерна лишь для не очень тонких пластинок.

Рассмотренные выше простейшие примеры показывают, что в теории пластинок не может быть всеобъемлющей расчетной модели. Каждая расчетная модель, позволяющая интегрирование трехмерных уравнений теории упругости по поперечной координате, естественно имеет свои пределы применимости, и определение этих пределов является предметом необходимых дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Физматгиз, 1987. 360 с.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки.-М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 460 с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки.-М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
4. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки.-М.: Гостехиздат, 1956. 419с.
5. Васильев В.В. О теории тонких пластин.-Изв.АН РФ, МТТ, 1992, №3, с.26-47.
6. Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин. - Изв. АН РФ, МТТ, 1992, №3, с.65-72.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
7.06.1999