

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО СТАТЬЕ
"К ДИСКУССИИ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИН"

Աղալովյան Ա.Ա.

Լ.Ա. Աղալովյան

Որոշ դիտողություններ «Մակրի տեսության վերաբերյալ բանալեմի մասին» հոդվածի վերաբերյալ

Բնութագրվում են նշված հոդվածի և ավիսյատտիկ մերողով սալերի և բաղաձրների տեսության կառուցման որոշ դրույթները:

L. A. Aghalovyan

Some remarks on the article "To the discussion on plates theory"

Обсуждаются некоторые положения указанной статьи и асимптотического метода построения теории пластин и оболочек.

Известная дискуссия по классической и уточненным теориям пластин, развернутая на страницах журнала Изв. РАН, МТТ, возобновила интерес научной общественности к прикладным теориям пластин и оболочек, в частности, к вопросам более четкого установления рамок их применимости. Является очевидным, что эти рамки могут быть установлены лишь с позиций решения трехмерной задачи, т.е. выяснения вопроса — с какой точностью та или иная прикладная теория аппроксимирует решение трехмерной красвой задачи.

В настоящее время математически установлено, что пространственная краевая задача теории упругости для тонких тел (балки, пластины, оболочки) является сингулярно возмущенной. Из теории же подобных уравнений и их систем следует, что их решения складываются из медленно меняющихся решений и решений типа пограничного слоя. Эти решения могут быть построены, в частности, асимптотическими методами. Вернувшись к теориям, основанным на тех или иных гипотезах, следует выяснить степень описания ими медленно меняющихся и типа пограничного слоя интегралов.

Судя по статье [1], ее автор, к сожалению, плохо представляет или не знаком с возможностями асимптотического метода. Из его изложения следует, что асимптотический метод якобы не реагирует на "отношения упругих характеристик по толщине и вдоль", что "асимптотический метод, основанный только на малом геометрическом параметре с требованием, чтобы первое (нулевое) приближение соответствовало теории Кирхгофа, не может существенно расширить область применимости".

Во-первых, никто не требовал (здесь предварительно заказы не принимаются), чтобы первое (нулевое) приближение соответствовало теории Кирхгофа. Асимптотическим методом лишь были построены вышеуказанные медленно меняющиеся (интеграл внутренней задачи) и типа пограничного слоя решения [2-5]. Единственным требованием здесь

является возможность получения итерационного процесса, т.е. непротиворечивой системы для последовательного определения коэффициентов асимптотического разложения. Были найдены асимптотические порядки искомых компонентов тензора напряжений и вектора перемещения во внутренней задаче и построены итерационные процессы для вычисления этих искомых величин. То обстоятельство, что исходное приближение во внутренней задаче практически совпало с данными по теории Кирхгофа, лишь подтверждает корректность последней теории. Здесь особо подчеркнем, что асимптотика искомых величин чутко реагирует на тип граничных условий, накладываемых на лицевые поверхности пластинки или оболочки. На это мы неоднократно обращали внимание исследователей. Нами были установлены новые асимптотики для иных классов задач (неклассические краевые задачи пластин и оболочек), принципиально отличающиеся от кирхгофоской [5-7]. Здесь тоже никто ничего дополнительно не "требует", а делается упор на результаты, вытекающие из корректно построенного итерационного процесса.

Во-вторых, найденная асимптотика искомых величин, соответствующая первой краевой задаче теории упругости, т.е. классической теории пластины, является единственной, а данные для исходного приближения характеризуют асимптотические порядки (главные части) искомых величин. Единственность найденной асимптотики следует также из единственности решения краевой задачи теории упругости. Попытки найти иную асимптотику для той же краевой задачи приводят к провалу. Так обстоит и с работой [8], на которую ссылается М.В.Белубекян. Приводимая в работе [8] асимптотика противоречива, ибо если выписать уравнения для исходного приближения, то невозможно удовлетворить граничным условиям на лицевых поверхностях $z = \pm h$ пластинки, когда там заданы отличные от нуля компоненты тензора напряжений. Именно этому случаю посвящены теория Кирхгофа и существующие уточненные теории, являющиеся предметом развернутой дискуссии.

То, что гипотезы Кирхгофа имеют "не только геометрическую сущность, но и физическую", следует также из асимптотической теории. Нами, в частности, для ортотропных пластин и оболочек установлены погрешности классической теории в зависимости от показателей анизотропии t_1, t_2 . Считается, что $E_3/E_1 = O(\epsilon^4)$, $G_{13}/G_{12} = O(\epsilon^4)$, $G_{23}/G_{12} = O(\epsilon^2)$ (см. [5], гл.8, §5, стр.332; гл.3, §4, стр.149, §5, стр.169; гл.4, §6; гл.5, §3, стр.229). Этот же вопрос для слоистых ортотропных полос изучен в [9]. Учет анизотропных свойств в поперечных плоскостях пластин асимптотическим методом детерминирован, т.е. метод позволяет не только оценивать погрешность классической теории, но и построением последующих приближений асимптотического разложения учитывать подобную анизотропию, указать случаи, когда найденная асимптотика, а следовательно и использование гипотез Кирхгофа, перестают быть верными.

Введение нескольких параметров, "в частности, связанных с физическими свойствами", должно исходить из конкретной задачи, отражать, например, очень сильную анизотропию (типа $G_{12}/G_{13} = O(\epsilon^{-2})$), геометрический же малый параметр $\epsilon = h/a$ с самого начала

естественным образом входит в уравнения теории упругости и позволяет выявлять те факторы, которые связаны с анизотропией в поперечных плоскостях пластины, с изменяемостью внешней нагрузки и др., построением последующих приближений учитывать их влияние.

Несостоятельным является утверждение автора статьи [1] о том, "что к асимптотическому методу должно быть предъявлено требование, чтобы в первом приближении получить вариант уточненной теории". Как указано выше, исходное приближение асимптотической теории соответствует классической теории и об уточнении классической теории может идти речь лишь когда построены последующие приближения во внутренней задаче и пограничные слои. Ограничившись тем или иным количеством приближений, предлагаем ту или иную прикладную модель [4,5]. Требование же, чтобы исходное приближение совпало с уточненной теорией, лишено основания, это означало бы, что классическая теория в корне ошибочна, а существующие уточненные теории вовсе не уточняют результаты по классической теории, а являются сутобо новыми, отвергающими результаты этой теории. Между тем, различными авторами доказано, что уточнения, вносимые этими теориями, не являются порядка слагаемых, соответствующих кирхгофовой теории, даже в случае сильной анизотропии [10-12]. Об исключительных случаях указано выше. Таким образом, асимптотическим методом можно предложить уточненную теорию, но она не будет соответствовать исходному (первому) приближению асимптотического разложения [4, 5, 13].

Что же касается ответов на поставленные в [1] четыре якобы проблемных вопроса, то на них асимптотическим методом давно даны ответы, в частности, большая серия граничных условий пространственной задачи подвергнута асимптотическому анализу в [4, гл.29; 5, гл.4; 14]. Хотелось бы увидеть анализ тех же граничных условий по сдвиговой теории и ответ на вопрос о точности удовлетворения поставленным краевым условиям. Автор статьи преувеличивает возможности теорий, учитывающих поперечные сдвиги. Известно, что эти теории не учитывают всех факторов, в частности, поперечное обжатие, вклад которого для анизотропных пластин может оказаться соизмеримым со вкладом сдвигового фактора, плоский пограничный слой и его влияние на внутреннее напряженно-деформированное состояние, т.е. с позиции трехмерной задачи отсутствуют целые классы решений.

По уточненным теориям нет приемлемого ответа на вопрос об особенностях в угловых точках. Известно, что удовлетворительный ответ на него можно получить на основе уравнений пространственной задачи теории упругости. Этот вопрос с исчерывающей полнотой изучен в работах М.Вильямса, Д.Боджи, К.С.Чобаняна, О.К.Аксентян, О.Н.Лушица и др. [15-17]. Рассмотрение же этого вопроса на основе классической и уточненной теорий имеет смысл лишь в том плане, чтобы выяснить, насколько эти результаты (как особенности решений соответствующих уравнений математической физики) соответствуют истинным, т.е. особенностям на основе уравнений теории упругости.

В заключение хочется подчеркнуть, что асимптотический метод с большим успехом может быть использован для решения новых классов задач для тонких тел, не поддающихся решению методом гипотез (сами гипотезы с самого начала не очевидны). Именно в этих областях нас ожидают принципиально новые результаты, а не в областях с фиктивным введением новых параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. К дискуссии по теории пластин. - Изв. НАН Армении. Механика, 1999, т. 52, №3, с. 77-79.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. - ПММ. 1962, т.26, вып.4, с. 668-686.
3. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates. - Comm. Pure and Appl. Math., 1961, vol.14. №1.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
6. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки. - Изв. НАН Армении. Механика, 1993, т.46, №3-4, с.3-11.
7. Агаловян Л.А. О влиянии граничных условий на характер напряженно-деформированного состояния тонких тел. - Изв. НАН и ГИУ РА. Техн. науки. 1995, т.48, №3, с.136-140.
8. Рябенков Н.Г. К дискуссии о гипотезе Кирхгофа. - В сб.: Актуальные проблемы механики оболочек. Казань, 1998, с.182-185.
9. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки. - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1986, т.39, №2, с.3-14.
10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Наука, 1967. 266с.
11. Амбарцумян С.А. Специфические особенности теории оболочек из современных материалов. - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1968, т.21, №4, с.3-19.
12. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера. - Изв. АН СССР. МТТ, 1990, №6, с.127-138.
13. Гольденвейзер А.Л. Замечания о статье В.В.Васильева "Об асимптотическом методе обоснования теории пластин". Изв. РАН. МТТ, 1997, №4, с.150-158.
14. Гольденвейзер А.Л. Граничные условия в двумерной теории оболочек. Математический аспект вопроса. — ПММ, 1998, т.62, вып.4, с.664-677.
15. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах.-Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1987. 338с.
16. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.-ПММ, 1967, т.31, вып.1, с.178-186.
17. Аксентян О.К., Луцик О.Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина.-Изв. АН СССР. МТТ, 1978, №5, с.102-108.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
3.05.1999