ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №3, 1999 Механика

УДК 531.36

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Матвийчук К.С.

Կ.Ս. Մատվիյչուկ

Պարամետրորեն գրգռվող բաշխված համակարգերի տեխնիկական կայունության որոշումը

Հետազոտվում է ոչ գծային պարամետրորեն գրգռվող բաշխված պրոցեսների տեխնիկական կայունությունը վերջավոր, անվերջ ժամանակի հատվածներում, ասիմպտոտիկ տեխնիկական կայունությունը հիլբերտյան տարածության մեջ: Օգտագործելով համեմատության մեթոդը Լյապունովի երկրորդ մեթոդի հետ և ինքնահամալուծ օպերատորների համար Ռելեյի հարաբերության էքստրեմալ հատկությունների հիմքի վրա հիլբերտյան տարածության մեջ ստացված են տրված համակարգերի տեխնիկական կայունության բավարար պայմանները:

K.S. Matvichuk

Definition of the Condition of the Technical Stability of Parametrical Excited Distributed System

Исследуется техническая устойчивость на конечном, бесконечном промежутках времени, асимптотическая техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов в гильбертовом пространстве. С использованием метода сравнения в сочетании со вторым методом Ляпунова и на базе экстремальных свойств отношений Рэлея для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве получены достаточные условия технической устойчивости заданных систем.

Настоящая работа посвящена исследованию технической устойчивости [1-7] параметрически возбуждаемых [8,9] нелинейных распределенных процессов на конечном и бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости. Для решения данной задачи применяются метод сравнения [8,6,10], метод собственных значений в сочетании со вторым методом Ляпунова при использовании экстремальных свойств отношений Рэлея для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [4,7,10-13].

1.Постановка задачи. Рассмотрим класс динамических процессов, описываемых в области $T_1 \times D,\ T_1 \subset T = [t_0, +\infty),\ t_0 \geq 0,\ D \subset R^{\nu}$, $x = (x_1, \ldots, x_{\nu}) \in R^{\nu}$, нелинейными уравнениями в частных производных

$$\begin{aligned} &\partial u(t,x)/\partial t = Z(t,\mu)u(t,x), \quad Z(t,\mu)u(t,x) = L(t)u(t,x) + \\ &+ \mu F[t, x, u(t,x), \partial u(t,x)/\partial t,\ \partial^2 u(t,x)/\partial x^2, \ldots, \mu],\ x \in D,\ t \in T_1 \end{aligned} \tag{1}$$

$u(t,x) - 2N$-мерный вектор состояния, удовлетворяющий краевым условиям

$$Gu(t,x) = 0, \quad x \in C, \quad C - \text{граница } D \tag{2}$$

$$u(t_0, x) = u_0(x) \tag{3}$$

Вектор-функция $u_0(x)$ имеет частные производные необходимых порядков в $D \subset R^{\nu}$; оператор $L(t)$ обозначает $(2N \times 2N)$-мерную матрицу линейных дифференциальных операторов в частных производных по x с зависящими от t непрерывными коэффициентами; $0 < \mu < 1$; $F = (F_1, ..., F_{2N})^*$ – нелинейная вектор-функция, непрерывная в заданной ограниченной области изменения своих аргументов и при $u(t, x) = 0$ не обязательно обращается в нуль.

Рассмотрим действительное функциональное пространство H $2N$-мерных векторов непрерывных функций, определенных в $T_1 \times D$. Определим в H скалярное произведение

$$\left(v_1, v_2\right) = \int\limits_D v_1(t, x) v_2(t, x) dx, \qquad v_1, v_2 \in H \tag{4}$$

Пусть H расширено так, что оно оказывается гильбертовым [8,11,12]. $\|\bullet\|$ – норма в H. Полагаем, что F по x удовлетворяют условию $F \in H$, $\forall \mu \in (0,1)$. Пусть G – линейный, не зависящий от t оператор в H, действующий в заданной области $Q_G \subset H$, а его замыкание $\bar{G}$ имеет компактную область определения Q_G [11,12]. Считаем, задача (1)-(3) имеет [5,9] однозначное непрерывное решение $u(t, x, \mu)$, обладающее в $T_1 \times D, T_1 \times C$ необходимыми производными, входящими в (1)-(3), и принадлежащее со всеми необходимыми производными пространству H. Пусть множество W состояний процесса (1)-(3) есть подмножество пространства H, такое, у которого элементы удовлетворяют граничному условию (2) и другим условиям гладкости, обеспечивающим свойство непрерывности функции $L(t)u$ задачи (1)-(3) [8,9,11,12].

При условиях (2), (3) рассмотрим линейную краевую задачу

$$\partial u(t, x) / \partial t = L(t) u(t, x) \quad x \in D, \ t \in T_1 \in T \tag{5}$$

Пусть существует решение $\tilde{u}(t, x)$ задачи (5), (2), (3), удовлетворяющее тем же свойствам регулярности, что и $u(t, x, \mu)$ [5,9]. Тогда решению $\tilde{u}(t, x)$ для каждого t можно сопоставить элемент в W, само $\tilde{u}(t, x)$ образует в W некоторую траекторию, а $L(t)$ есть оператор в H, действующий в области $W \subset H$: $L(t)$: $W \to H$, $Z(t, x, \mu)$ есть оператор, также действующий из W в H при каждом $\mu \in (0,1)$: $Z(t, \mu)$: $W \to H$ [11,12]. Решение $u(t, x, \mu)$ представляет некоторую траекторию в W, отличающуюся в общем от траектории, соответствующей (5). Пусть существует сопряженный оператор $L^*(t)$ к $L(t)$. Определим меру $\rho(u, v)$

$$\rho(u, v) = \left[\left(A_0 z, A_0 z\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(A_i z, A_i z\right)\right]^{1/2} \qquad u, v \in W \tag{6}$$

где $z = u - v$, A_0 – оператор тождественного преобразования, а A_1, A_n – линейные дифференциальные операторы в H, действующие в W [8,11]. Задачу (1)-(3) рассматриваем в области:

$$\Omega = \{t, x, u, \mu : t \in T_1 \subset T,\ x \in D \subset R^n,\ \|u\| \le r = \mathrm{const} > 0$$
$$\forall u \in W(T_1 \times D) \subset H,\ Z(t,\mu) : W \to H,\ 0 < \mu < \mu_0 < 1\} \qquad (7)$$

2.Функционал Ляпунова и соответствующие соотношения. Рассмотрим функционал

$$V[u,t] = (u, B(t)u), \quad u \in W \qquad (8)$$

где $B(t) : H \to H$ – самосопряженный оператор в смысле [8,11,12]

$$(v, B(t)w) = (w, B(t)u) \quad v, w \in W \qquad (9)$$

содержит необходимые дифференциальные элементы по x, дифференцируемый по t, имеет ту же размерность, что и $L(t)$. Пусть $B(t)$ определен так, что

$$V[u,t] \ge \alpha\rho^2(u,0), \quad \forall t \in T_1, \quad \alpha - \mathrm{const} > 0 \qquad (10)$$

Пусть определены [5,6,14] значение $V[u_0(x), t_0]$ на начальных данных (3), функция $P(t,\mu)$ и постоянная $\bar{a}$, удовлетворяющие условиям

$$P(t_0,\mu) \ge \bar{a},\ 0 < P(t,\mu) \le \bar{C},\ \bar{C} = \mathrm{const} > 0,\ \forall t \in T_1,\ \mu \in (0,1) \qquad (11)$$

Пусть ограниченный оператор $N(t) : W \to H$ равен $N(t) = L^*(t)B(t) + B(t)L(t) + \dot{B}(t)$, где $\dot{B}(t) = d[B(t)]/dt$. Полагаем, что имеет место задача о собственных значениях [7,8]

$$N(t)u = \lambda B(t)u, \quad u \in W,\ t \in T_1 \qquad (12)$$

собственные значения которой являются вещественными ограниченными величинами $\{\lambda_i(t)\}$ для всех $t \in T$, при этом t рассматривается лишь как параметр. Обозначим $\lambda_{max}(t)$ наибольшее собственное значение (12). Пусть задана область $\Lambda = \{t, z, \lambda_{max}(t), \mu : t \in T_1 \subset T,\ -\infty < z < \infty,$ $|\lambda_{max}(t)| \le b,\ b = \mathrm{const} > 0,\ 0 < \bar{\mu} < \mu_0 \le 1\}$, в которой рассмотрим задачу Коши сравнения [5,6,10]. Обозначим $F(t,\mu)$, $\bar{F}(t,\bar{\mu})$ будем решения задач (1)-(3) и (5), (2), (3) соответственно.

3.Условия технической устойчивости системы. Для (1)-(3) имеем следующие свойства.

Теорема. Пусть справедливы условия: 1. Для краевых задач (1)-(3) и (5), (2), (3), где при вышеуказанных свойствах регулярности их коэффициентов операторы $Z(t,\mu)$, $L(t)$ есть операторы в H, действующие в области $W \subset H$, существуют решения с вышеуказанными свойствами. 2. Существует положительно определенный относительно меры $\rho(u,0)$ функционал $V[u,t] = (u, B(t), u)$, порожденный заданным оператором $B(t) : H \to H$. 3. Для $L(t)$

существует сопряженный оператор $L^*(t)$, удовлетворяющий при $\forall v, w \in W$ условию

$$\left(L(t)v, B(t)w\right) = \left(v, L^*(t)B(t)w\right) \quad (13)$$

4. В задаче (12) оператор $B^{-1}(t)N(t)$ является компактным при $t \in T_1 \subset T$. 5. Существуют постоянные $C_i > 0, i = 1,2,3,4$ и значение $\mu_1 > 0$, удовлетворяющее условию $[\mu - \tilde{\mu}] < \mu_1$, неотрицательные непрерывные на $T_1 \subset T$ функции $f_i(t)$, $(i = 1,2,3)$, $\gamma(t)$, для которых справедливы неравенства:

а) $\left\|u(t,x,\mu) - \tilde{u}(t,x)\right\| \left\|N(t)\left[u(t,x,\mu) - u(t,x)\right]\right\| \le C_1 f_1(t)$

б) $2\left\|\mu F(t,\mu) - \tilde{\mu}\bar{F}(t,\tilde{\mu})\right\| \left\|B(t)u(t,x,\mu)\right\| \le C_2 f_2(t)$

в) $\left\|\bar{F}(t,\tilde{\mu})\right\| \left\|B(t)u(t,x,\mu)\right\| \le C_3 f_3(t)$

г) $\left|V\left[\bar{u}(t,x),t\right] - V\left[u(t,x),t\right]\right| \le C_4 \tilde{\gamma}(t)$

6. В области Λ существует скалярная задача Коши сравнения

$$dy/dt = \lambda_{max}(t)\left[y + \sigma(t,\mu)\right], \quad t \in T_1 \quad (14)$$

$$y(t_0) = y_0 \ge V\left[u_0(x), t_0\right], \quad \sigma(t,\tilde{\mu}) = \int_{t_0}^{t} \left[C_4 b\tilde{\gamma}(\tau) + f_3(\tau,\tilde{\mu})\right] d\tau$$

$$f_3(t,\tilde{\mu}) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + 2\mu C_3 f_3(t) \quad (15)$$

решение которой $\bar{y}(t) = y(t,t_0,y_0)$ определено при $t \in T_1$ и удовлетворяет неравенствам

$$\bar{y}(t) + \sigma(t,\tilde{\mu}) \le P(t,\mu), \quad t \in T_1, \ y_0 \le \bar{a} \quad (16)$$

Тогда 1. Процессы, описываемые задачей (1)-(3) в H, технически устойчивы в области Ω на промежутке времени T_1. 2. Если условия теоремы справедливы на каждом интервале $T_1 \subseteq T$, тогда процессы (1)-(3) технически устойчивы в области Ω на бесконечном промежутке времени T. 3. Если функции $\bar{y}(t)$, $\sigma(t,\mu)$ удовлетворяют условию

$$\bar{y}(t) + \sigma(t,\tilde{\mu}) \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \ \mu \in (0,\mu_0) \quad (17)$$

то процессы (1)-(3) асимптотически технически устойчивы в области Ω.

Доказательство. Вычислим $dV(t)/dt$ вдоль решения задачи (1)-(3)

$$dV(t)/dt = \left(u, N(t)u\right) + 2\mu\left(F(t,\mu), B(t)u\right)$$

$$N(t) = L^*(t)B(t) + B(t)L(t) + \dot{B}(t) \quad (18)$$

Задача (12) связана с линейной краевой задачей (5), (2), (3). Используя величины $\left(\tilde{u}(t,x), N(t)\tilde{u}(t,x)\right)$, $\tilde{\mu}\left(F(t,\tilde{\mu}), B(t)\tilde{u}(t,x)\right)$, для (8) получаем неравенство

$$dV(t)/dt \le \left(\tilde{u}(t,x), N(t)\tilde{u}(t,x)\right) + \left\|u(t,x,\mu) - \tilde{u}(t,x)\right\| \left\|N(t)\left[u(t,x,\mu) - \tilde{u}(t,x)\right]\right\|$$

$$+ 2\left\|\mu F(t,\mu) - \tilde{\mu}\bar{F}(t,\tilde{\mu})\right\| \times \left\|B(t)u(t,x,\mu)\right\| + 2\tilde{\mu}\left\|\bar{F}(t,\tilde{\mu})\right\| \left\|B(t)u(t,x,\mu)\right\| \quad (19)$$

Из (19) и условий теоремы вдоль решения (1)-(3) имеем

$$dV(t)/dt \le \left(\overline{u}(t,x), N(t)\widetilde{u}(t,x)\right) + f_1(t,\widetilde{\mu}) \qquad t \in T \tag{20}$$

Убеждаемся, что $N(t)$ – самосопряженный оператор в смысле (9). Тогда задача (12) имеет вещественные собственные значения. Согласно условиям 4 теоремы задача (12) при всех $t \in T_1 \subset T$ имеет ограниченные собственные значения, то есть $\lambda_{max}(t)$-ограниченная действительная величина [12,14,15]. Собственные векторы задачи (12) образуют полную систему в W. Находим неравенство [7,8,12,14] $\left(u, N(t)u\right)/\left(u, B(t)u\right) \le \lambda_{max}(t)$, $t \in T_1 \subset T$; $u \in W \subset H$, где имеем $\left|\lambda_{max}(t)\right| \le b$. Отсюда вместо (20) получаем оценку

$$dV(t)/dt \le \lambda_{max}(t)V(t) + C_4 b\gamma(t) + f_3(t,\mu) \tag{21}$$

Из (21) [5,6,10] следует задача Коши сравнения (14), (15), порожденная операторами $Z(t)$, $L(t)$, $B(t)$. Используя при $\forall t \in T_1$ решение задачи (14), (15)

$$\overline{y}(t) = y_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda_{max}(\tau)d\tau\right] + \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda_{max}(\tau)d\tau\right] \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} \left\{ f(t,\widetilde{\mu}) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \lambda_{max}(s)ds\right]\right\} d\tau - \sigma(t,\widetilde{\mu}), \quad f(\tau,\widetilde{\mu}) = C_4 b\gamma(t) + f_3(\tau,\widetilde{\mu}),$$

по теореме о дифференциальных неравенствах из [10] вдоль решения $u(t,x,\mu)$ краевой задачи (1)-(3) для $V[u,t]$ (8) находим оценку $V[u(t,x,\mu),t] \le \overline{y}(t) + \sigma(t,\widetilde{\mu})$, $\forall t \in T_1$. Используя условия (16) теоремы, получаем неравенства

$$V[u(t,x,\mu),t] \le P(t,\mu), \quad V[u_0(x),t_0] \le \overline{a}, \quad \forall t_0, t \in T_1 \tag{22}$$

откуда следует, что при условиях теоремы возмущенная траектория из Ω процессов (1)-(3) будет находиться от невозмущенной $u(t,x,\mu) \equiv 0$ при $\forall t \in T_1$ на "расстоянии", не превышающем по величине пределов, определяемых наперед заданными функцией $P(t,\mu)$, постоянной $\overline{a}$. Неравенства (22) характеризуют заданную мерой $\rho(u,0)$ окрестность $\rho(u,0) \le \overline{C}$, $\overline{C} = \text{const} > 0$ невозмущенного процесса, где $\overline{C}$ определяется первым неравенством из (22). Два последних утверждения теоремы доказываются очевидным образом с незначительными изменениями. На этом доказательство теоремы завершено.

4.Техническая устойчивость нелинейных состояний стойки при параметрическом возбуждении. Рассматриваем в гильбертовом пространстве нелинейную краевую задачу о поперечных колебаниях вертикально расположенной стойки, шарнирно закрепленной в основаниях и нагруженной переменной во времени продольной возбуждающей силой $f(t)$. Эту задачу представим в операторной форме, используя результаты из [8,14]

$$\partial u(t,x)/\partial t = Z(t,\mu)u(t,x),\ Z(t,\mu)u(t,x) = \\ = L(t)u(t,x) + \mu F\left(t, u_1^2(t,x), u_2^3(t,x)\right) \tag{23}$$

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial^4/\partial x^4 - f(t)\partial^2/\partial x^2 & -\beta \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 \\ \left[1 - u_1^2(t,x)\right]u_2^3(t,x) \end{pmatrix},\ \mu \in (0,1)$$

$$u(t,x) = \left(u_1(t,x), u_2(t,x)\right)^*,\ u_1(t,x) = w(t,x),\ u_2(t,x) = \partial u_1(t,x)/\partial t$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = u_0(x),\ u_0(x) = \left(w_0(x), v_0(x)\right)^* \tag{24}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0,\ \partial^2 u(t,0)/\partial x^2 = \partial^2 u(t,1)/\partial x^2 = 0 \tag{25}$$

Совместно с задачей (23)-(25) рассмотрим линейную задачу при (24), (25):

$$\partial u(t,x)/\partial t = L(t)u(t,x) \tag{26}$$

где $w(t,x)$-поперечные смещения точек осевой линии стойки, $w_0(x), v_0(x)$-четырежды непрерывно дифференцируемые функции по $x \in D = [0,1]$, $T = \left[0, L, \mu^{-1}\right]$ ($L = \text{const} > 0$)-заданный промежуток времени. $T \subset I = [t_0, \infty)$. Для $f(t)$ возможен гармонический закон изменения [8]

$f(t) = 4\pi^2(R_0 + R_t \cos\omega t)$, $R_0 = P_0 l^2/4\pi^2 EI$, $R_t = P_t l^2/4\pi^2 EI$, P_0 – постоянная составляющая сжимающей силы; P_t-постоянная амплитуды пульсирующей составляющей продольной силы; l – длина стойки; E – модуль Юнга, I – момент инерции поперечного сечения стойки относительно ее оси, проходящей через ее центр масс; β-коэффициент демпфирования; $\mu \in (0,1)$. Для $f(t)$ могут быть и другие представления. Считаем, что краевая задача (23)-(25) имеет однозначное непрерывное решение $w(t,x,\mu)$ в области $T \times D$ при $\mu \in (0,1)$, обладающее в $T \times D$ согласно (23)-(25) необходимыми непрерывными производными и принадлежащее вместе с указанными производными вещественному гильбертовому пространству $L^2(D)$. Относительно решения $w(t,x)$ линейной задачи (26), (24), (25) допускаем аналогичные свойства.

Рассмотрим гильбертого пространство H векторов $\{u_1(t,x), u_2(t,x)\}$ с непрерывными функциями $u_1(t,x), u_2(t,x)$ при $t \in T$, $x \in D$, для которых [14]

$$(u,v)=\int_D\sum_{i=1}^{2}u_i(t,x)v_i(t,x)dx,\quad u,\ v\in\overline{H}$$

Задачу (23)-(25) рассмотрим в области

$$\Omega=\{t,x,u_1,\partial u_1/\partial t,\partial^2u_1/\partial t^2,\partial u_1/\partial x,...,\partial^4u_1/\partial x^4,f(t),\mu\ \ t\in T,\ x\in D,$$

$$\|u_1\|_2\le b_1,\|\partial u_1/\partial t\|_2\le b_2,\|\partial^2u_1/\partial t^2\|_2\le b_3,\|\partial u_1/\partial x\|_2\le c_1,\ ...,$$

$\|\partial^4u_1/\partial t^4\|_2\le c_4,\ |f(t)|\le c_5,\ b_i=\text{const}>0,(i=1,2,3),\ c_j=\text{const}>0,$ ($j=1,2,3,4,5$), $\mu\in(0,1)$. В качестве меры $\rho(u,0)$ в $\widetilde{W}\subset\overline{H}$, где $\widetilde{W}$ аналогично [14], положим

$$\rho(u,0)=\left\{\int_0^l\left[\left(\partial^2w/\partial x^2\right)^2+\left(\partial w/\partial x\right)^2+w^2+v^2\right]dx\right\}^{1/2}\tag{27}$$

Сопряженный оператор $L^*(t)$ к $L(t)$ имеет представление

$$L^*(t)=\begin{pmatrix}0 & \left(\partial^4/\partial x^4\right)-f(t)\left(\partial^2/\partial x^2\right)\\ 1 & -\beta\end{pmatrix}.\tag{28}$$

При условиях [8,14] рассмотрим функционал

$$V[u,t]=(u,B(t)u),\quad B(t)=\begin{pmatrix}\left(\partial^4/\partial x^4\right)+\gamma(t)\left(\partial^2/\partial x^2\right)+\alpha_1+\beta^2/4 & \beta/2\\ \beta/2 & 1\end{pmatrix}\tag{29}$$

($\gamma(t)$ – некоторый коэффициент, непрерывно дифференцируемый по $t\in T$, α_1 -некоторый постоянный параметр), который будет определенно положительным относительно меры $\rho(u,0)$ при условиях

$$\begin{cases}0<\widetilde{\mu}<1,\ (1-\widetilde{\mu})4\pi^2-(\widetilde{\mu}+\varepsilon)>\gamma(t)\\ \alpha_1>\widetilde{\mu}-\beta^2/4-\varepsilon\pi^2+\beta^2/[4(1-\widetilde{\mu})],\ \varepsilon=\text{const}>0\end{cases}\tag{30}$$

$\widetilde{\mu}$ -фиксированное значение параметра $\mu\in(0,1)$. Находим:

$$N(t)=\begin{pmatrix}-\beta\left(\partial^4/\partial x^4\right)-h(t)\left(\partial^2/\partial x^2\right) & -g(t)\left(\partial^2/\partial x^2\right)+\delta_-\\ -g(t)\left(\partial^2/\partial x^2\right)+\delta_- & -\beta\end{pmatrix}$$

$$h(t)=\beta f(t)-d\gamma(t)/dt,\quad g(t)=f(t)-\gamma(t),\ \delta_\pm=\alpha_1\pm\beta^2/4\tag{31}$$

Имеем задачу о собственных значениях при (29)-(31):

$$N(t)y=\lambda B(t)y,\quad y=(y_1,y_2)\in W,\ t\in T\tag{32}$$

Уравнение (32) сведем к уравнению для одной компоненты y_1:

$$\partial^4y_1/\partial x^4+k(t)\left(\partial^2y_1/\partial x^2\right)+c(t)y_1=0\tag{33}$$

$$k(t)=\{(\lambda+\beta)[\beta f(t)-\dot\gamma(t)+\lambda\gamma(t)]+2[f(t)-\gamma(t)](\delta_--\lambda\beta/2)\}\{(\lambda+\beta)^2-$$
$$-[f(t)-\gamma(t)]^2\}^{-1},\ c(t)=\left[\lambda(\lambda+\beta)\delta_+-(\delta_--\lambda\beta/2)^2\right]/\left[(\lambda+\beta)^2-(f(t)-\gamma(t))^2\right]$$

при следующих граничных условиях:

$$y_1(t,0)=y_1(t,1)=0,\ \partial^2 y_1(t,0)/\partial x^2=\partial^2 y_1(t,1)/\partial x^2=0 \tag{34}$$

Соответствующее уравнению (33) характеристическое уравнение имеет корни

$$\begin{aligned}\tilde{r}_1&=+i\left(k/2+\sqrt{k^2/4-c}\right)^{1/2},\ \tilde{r}_2=-i\left(k/2+\sqrt{k^2/4-c}\right)^{1/2}\\ \tilde{r}_3&=+i\left(k/2-\sqrt{k^2/4-c}\right)^{1/2},\ \tilde{r}_4=-i\left(k/2-\sqrt{k^2/4-c}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{35}$$

Рассмотрим только случай, когда $k(t)>0,\ \forall t\in T$. При этом получаем две последовательности собственных функций [8]:

а) при $c>0,\ k^2>4c$

$$y_1(t,x)=C_1(t)\sin r_1x+C_2(t)\cos r_1x+C_3(t)\sin r_2x+C_4(t)\cos r_2x \tag{36}$$

если справедливо условие

$$\left(r_1^4+r_2^4-2r_1^2r_2^2\right)\sin r_1\sin r_2=0,\ r_{1,2}=\left(k/2\pm\sqrt{k^2/4-c}\right)^{1/2} \tag{37}$$

б) при $c<0,\ k^2>4c$

$$y_1(t,x)=C_1(t)\sin r_1x+C_2(t)\cos r_1x+C_3(t)\mathrm{sh}r_2x+C_4(t)\mathrm{ch}r_2x \tag{38}$$

если справедливо условие

$$\left(r_1^4+r_2^4+2r_1^2r_2^2\right)\sin r_1\mathrm{sh}r_2=0,\ r_{1,2}=\left(\pm k/2+\sqrt{k^2/4-c}\right)^{1/2} \tag{39}$$

Для максимального собственного значения $\lambda_{\max}(t)$ имеем

$$\lambda_{\max}(t)=\max_{k_n}\left\{\begin{array}{l}-\beta-\dot{\gamma}(t)/2[k_n-\gamma(t)]+\left[\left(\dot{\gamma}(t)/2[k_n-\gamma(t)]\right)^2+\left(2[f(t)-\right.\right.\\ \left.\left.-\gamma(t)](\alpha_1+(\beta/2))/(k_n-\gamma(t)\right)[f(t)-\gamma(t)]^2/\left(1-\gamma(t)/k_n\right)\right]^{1/2}\end{array}\right\}$$

$$n=1,2\ldots,\quad \forall t\in T \tag{40}$$

Используя равенство

$$c_n(\lambda+\beta)^2-\left[4c_n/\gamma^2(t)\right]\delta_*^2=\alpha_1(\lambda+\beta)^2-\delta_*^2 \tag{41}$$

убеждаемся [14], что $k_n\neq\gamma$ при любом целом n, $\forall t\in T$. Должно выполняться для $\forall k_n$ условие

$$k_n>(1-\tilde{\mu})4\pi^2-(\tilde{\mu}+\varepsilon),\ \ n=1,2,\ldots \tag{42}$$

при каждом $t\in T$ совместно с условиями (37) или (39). Если $k_n\to\infty$, то величина λ стремится к пределу $\lambda_\infty=-\beta+[f(t)-\gamma(t)]$. Значение $\lambda_n=0$ отсутствует [8,11,12]. Имеет смысл величина $A=\sup\limits_{t\in T}|\lambda_{\max}(t)|$, зависимая от условий (37) (или (39)) и (42). Собственные векторы в (32) [8,14] образует полную ситему в $\overline{W}\subset\overline{H}$. Используем величины

$$M(t,x,\mu)=\left[1-w^2(t,x,\mu)\right]\left[\partial w(t,x,\mu)/\partial t\right]^3w(t,x,\mu),$$

$$\xi(t,\mu) = V\left[\widetilde{u}(t,x) - u(t,x,\mu),t\right], \; \left|\xi(t,\mu)\right| \le k = \text{const} > 0,$$

$\widetilde{M}_1(t,x) = \left[1 - w^2(t,x)\right]\left[\partial w(t,x)/\partial t\right]^1 u(t,x)$. Вдоль решения задачи (23)-(25) в Ω имеем $dV\left[u(t,x,\mu),t\right]/dt < \lambda_{max}(t)V\left[u(t,x,\mu),t\right] + \widetilde{\mu}f_1(t) + R$, $\widetilde{f}(t) = (1+\beta/2)\left\|\widetilde{M}_1(t)\right\|_2$, $R = \left(|\mu - \widetilde{\mu}| + 2\widetilde{\mu}\right)(\beta/2+1)(1+b_1^2)b_1 b_2^3 + Ak$.

Рассмотрим при $t \in \left[0, L\widetilde{\mu}^{-1}\right] = T_1$ уравнение сравнения

$$dz/dt = \lambda_{max}(t)\left[z + \sigma(t,\widetilde{\mu})\right], \; \sigma(t,\widetilde{\mu}) = \int_0^t \left[\widetilde{\mu}(1+\beta/2)\left\|M_1(\tau)\right\|_2 + R\right]d\tau \qquad (43)$$

$$z(0) = z_0, \; z_0 \ge V\left(u_0(x),0\right), \; z_0 \le \bar{a} = \text{const} > 0 \qquad (44)$$

Согласно [10] вдоль решения задачи (23)-(25) из (43), (44) находим

$$V\left[w(t,x,\mu),(\partial w(t,x,\mu)/\partial t),t\right] \le \exp\left[\int_0^t \lambda_{max}(\tau)d\tau\right]\left[\bar{a} + \int_0^t \left\{\left(\widetilde{\mu}\widetilde{f}_1(\tau) + R\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \exp\left[-\int_0^\tau \lambda_{max}(\tau)d\tau\right]\right\}d\tau\right] = P(t,\mu), \; t \in T = \left[0, L\mu^{-1}\right] \cap \left[0, L\widetilde{\mu}^{-1}\right] \qquad (45)$$

Следовательно, окончательно в области Ω при $t \in T$ имеем неравенство

$$V\left[w(t,x,\mu),(\partial w(t,x,\mu)/\partial t),t\right] \le K, \; t \in T = \left[0, \bar{L} < \bar{\mu}^{-1}\right], \; \bar{\mu}^{-1} = \min\left\{\mu^{-1}, \widetilde{\mu}^{-1}\right\}$$

$$K = \exp(A\bar{L}\mu^{-1})\left\{\bar{a}_0 + \bar{L}\mu^{-1}\left[\widetilde{\mu}(1+\beta/2)(b_1 + b_1^2)b_2^1 + R\right]\right\} \qquad (46)$$

Из доказанной теоремы следует техническая устойчивость системы (23)-(25) в T. Если оценки (45)-(46) выполняются при всех $T \subset I$, то процессы (23)-(25), заданные при всех $T \subset I$, технически устойчивы в I. Достаточно условие асимптотической технической устойчивости будет выполнено, если дополнительно справедливо: $\Xi(t) \cdot \sigma(t,\widetilde{\mu}) \to 0$ при $t \to +\infty$, $\mu, \widetilde{\mu} \in (0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале времени. - Итоги науки и техники. Общая механика. - М.: ВИНИТИ, 1976, т.3, с.43-47.
2. Байрамов Ф.Д. О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих возмущениях. - Изв.Вузов. Авиац.техника, 1974, вып.2, с.5-11.

3. Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения. - МТТ, 1975, №6, с.15-24.
4. Зубов В.И. Методы А.М.Ляпунова и их применение. - Л.: Ленинград. ун-т, 1957. 241 с.
5. Матвийчук К.С. О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим. - Дифференц.уравнения, 1984, т.20, с.2009-2011.
6. Матвийчук К.С. О технической устойчивости движения панели в газовом потоке. - Прикл.механика и техн.физика, 1988, №6, с.93-99.
7. Diaz J.B., Metcalf F.T. A Functional Equation for Rayleigh Quotient Eigenvalues and Some Application. - J.Math and Mech., 1968, v.17, '7, p.623-630.
8. Hsu C.S., Lee T.H. A Stability Study of Continuos Systems under Parametrics Excitations Via Liapunov's Direct Method. - In: IUT Symposium on Instability of Continuos Systems. West Germany, 1969. - Berlin: Springer, 1971, p.112-118.
9. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. - Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.
10. Szarski J. Differential Inequalities. - Warszawa. PWN, 1967. 256 p.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1981. 543 с.
12. Иосида К.Ф. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1967. 624 с.
13. Кириченко Р.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. - Киев: Вища школа, 1978. 212 с.
14. Матвийчук К.С. Техническая теория параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке. - Изв. АН СССР. МТТ, 1990, №4, с.122-131.
15. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев: Наукова думка, 1980. 243 с.

Институт механики им.
С.П.Тимошенко НАН Украины

Поступила в редакцию
20.01.1998