ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **52, №3, 1999** Механика

УДК 539.3:534.2

ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНКЕ

Гулгазарян Г.Р.

Գ.Ռ. Ղուլղազարյան
Ռելեյի տիպի ալիքները կիսաանվերջ ծալքավոր սալում

Աշխատանքում հետազոտվում է հարթ, ռելեյի տիպի ալիքների տարածման հարցը, որոնք մարում են կիսաանվերջ ծալքավոր սալի ազատ եզրից ծնիչների ուղղությամբ, երբ ծռման կոշտությունը ընդունվում է հավասար զրոյի (անմոմենտ խնդիր)։

Ենթադրվում է, որ ծնիչները ուղղահայաց են սալի եզրին և միջին մակերևույթի ուղղորդ կորի կորությունը ունի հետևյալ տեսքը $R^{-1}(\beta) = k\varepsilon \cos k\beta, \quad k > 0, \quad -\infty < \beta < \infty$

Այստեղ $\varepsilon = \mathrm{const}$, β-ն միջին մակերևույթի ուղղորդ կորի փոփոխական աղեղի օրիենտացված երկարությունն է։ Գտնվում և թվային մեթոդով լուծվում է դիսպերսիոն հավասարումը։

G.R. Ghulghazaryan
The waves of Reyleigh type in semi-infinite goffered plate

В работе исследуется вопрос распространения плоских волн типа Рэлея, затухающих от свободного края полубесконечной гофрированной пластинки вдоль направления ее образующих, когда жесткость на изгиб принимается равной нулю (безмоментная задача).

Предполагается, что образующие ортогональны к краю пластинки и кривизна направляющей кривой срединной поверхности имеет вид

$$R^{-1}(\beta) = k\varepsilon \cos k\beta, \quad k > 0, \quad -\infty < \beta < \infty$$

Здесь $\varepsilon = \mathrm{const}$, β –ориентированная длина переменной дуги направляющей кривой срединной поверхности. Находятся и численным методом решаются дисперсионные уравнения.

Вопросы распространения плоской волны типа Рэлея, затухающей от свободного края полубесконечной пластинки, изучены в [1,2].

В качестве исходных уравнений возьмем следующие уравнения, которые соответствуют безмоментной теории цилиндрических оболочек [3]:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha}=\lambda u_1 \\
-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_3}{R}\right)=\lambda u_2 \qquad (1) \\
-\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{u_3}{R^2}=\lambda u_3
\end{gathered}
$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции смещения точки срединной поверхности, α, β – ортогональные координаты точки срединной поверхности, $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ – кривизна направляющей кривой.

$$\lambda = \left(1-\sigma^2\right)\omega^2\rho / E \tag{2}$$

где ρ – удельная плотность материала оболочки, E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, ω – угловая частота.

Для дальнейшей цели удобно систему (1) заменить системой уравнений [4]

$$\Gamma u_1 = \sigma\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\left(\frac{u_3}{R}\right) - \frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}\left(\frac{u_3}{R}\right) + \frac{2\lambda\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_3}{R}\right)$$

$$\Gamma u_2 = \frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\left(\frac{u_3}{R}\right) + (2+\sigma)\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}\left(\frac{u_3}{R}\right) + \frac{2\lambda}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_3}{R}\right) \tag{3}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \frac{u_3}{R^2} = \lambda u_3$$

Здесь оператор

$$\Gamma = \Delta\Delta + (3-\sigma)/(1-\sigma)\lambda\Delta + 2\lambda^2/(1-\sigma) \tag{4}$$

Граничные условия принимают вид:

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\beta} + \frac{\partial u_2}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0} = 0$$

$$u_i(\alpha,\beta) = u_i(\alpha,\beta+2\pi/k), \quad i=\overline{1,3}, \quad \sum_{j=1}^{3}\left|u_j\right|_{\alpha\to+\infty} = 0 \tag{5}$$

Периодическое решение системы (3) ищем в виде

$$u_1(\beta) = \exp(k\,æ\,\alpha)\left(u_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}\cos 2mk\beta\right)$$

$$u_2(\beta) = \exp(k\,æ\,\alpha)\sum_{m=1}^{\infty} v_{2m}\sin 2mk\beta \tag{6}$$

$$u_3(\beta) = \exp(k\,æ\,\alpha)\sum_{m=1}^{\infty} w_{2m-1}\cos(2m-1)k\beta$$

Подставим (6) в (3). Из первых двух уравнений (3) получим

$$c_{2m}u_{2m} = \varepsilon/2æ\,a_{2m}\left(w_{2m-1} + w_{2m+1}\right)$$

$$c_{2m}v_{2m} = -\varepsilon/2(2m)b_{2m}\left(w_{2m-1} + w_{2m+1}\right)$$

$$a_{2m} = \sigma æ^2 + 4m^2 + \sigma\eta^2, \quad b_{2m} = (2+\sigma)æ^2 - 4m^2 + \eta^2 \tag{7}$$

$$c_{2m} = \left(æ^2 - 4m^2\right)^2 + (3-\sigma)/2\eta^2\left(æ^2 - 4m^2\right) + (1-\sigma)/2\eta^4$$

$$\eta^2 = 2\lambda/\left[k^2(1-\sigma)\right], \quad w_{-1} = w_1, \quad m = \overline{0,\infty}$$

При $m=0$ в (7) u_0 заменяется на $u_0/2$.

Из третьего уравнения (3), учитывая, что $w_{-1} = w_1$,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} = \frac{k^2\varepsilon}{2}æ\exp(k\,æ\,\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\left(u_{2m-2} + u_{2m}\right)\cos(2m-1)k\beta$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta} = \frac{k^2\varepsilon}{2}\exp(k\,æ\,\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\left[(2m-2)v_{2m-2} + 2mv_{2m}\right]\cos(2m-1)k\beta$$

$$\frac{u_1}{R^2} = \frac{k^2\varepsilon^2}{4}\exp(k\,æ\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}\left[w_{2m-3} + 2w_{2m-1} + w_{2m+1}\right]\cos(2m-1)k\beta \tag{8}$$

Получим бесконечную систему уравнений

$$\varepsilon^2 P_m w_{2m-1} + \left[Q_m + \varepsilon^2(P_m + R_m)\right]w_{2m+1} + \varepsilon^2 R_m w_{2m+3} = 0 \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} P_m &= \left(c_{2m} + 4m^2 b_{2m} - \sigma\, æ^2 a_{2m}\right)c_{2m+2} \\ R_m &= \left(c_{2m+2} + (2m+2)^2 b_{2m+2} - \sigma\, æ^2 a_{2m}\right)c_{2m} \\ Q_m &= -2(1-\sigma)\eta^2 c_{2m}c_{2m+2}, \quad m = \overline{0,\infty} \end{aligned} \tag{10}$$

Можно показать, что бесконечный определитель системы (9) при любом комплексном $|\eta|^2 > 2(1+\sigma)\varepsilon^2$ и æ относится к известному классу сходящихся определителей — к нормальным определителям [5]. В этом можно убедиться, деля каждую его строку на $-2(1-\sigma)\eta^2(2m+1)^8$, $m = \overline{0,\infty}$ соответственно, и воспользоваться тем, что в выражениях P_m и R_m из (10) отсутствует m^8.

Чтобы система (9) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель (он является определителем типа Хилла) равнялся нулю:

$$D(æ, \eta, \sigma, \varepsilon) = 0 \tag{11}$$

Уравнение (11) устанавливает функциональную зависимость $æ = æ(\eta,\sigma,\varepsilon)$. В явной форме эта зависимость устанавливается следующим образом. Возьмем D из (11) при конечном n и приравняем нулю:

$$D_{n+1}(æ, \eta, \sigma, \varepsilon) = 0 \tag{12}$$

Найдем $æ_n$ решение алгебраического уравнения (12). Точное решение получится из $æ_n$ при $n \to \infty$.

Заметим, что определитель D_{n+1} вычисляется следующей рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} &D_1 = a_0 + \varepsilon^2(2P_0 + R_0), \quad D_2 = \left[Q_1 + \varepsilon^2(2P_1 + R_1)\right]D_1 - \varepsilon^4 R_0 P_1 \\ &D_{n+1} = \left[Q_n + \varepsilon^2(P_n + R_n)\right]D_n - \varepsilon^4 P_n R_{n-1} D_{n-1}, \quad n \ge 2 \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $æ_1$ и $æ_2$ являются корнями уравнения (11) с отрицательными действительными частями и $\left(w_1^{(j)}, w_3^{(j)}, \ldots, w_{2m-1}^{(j)}, \ldots\right)$, $(j = 1,2)$ являются нетривиальными решениями системы (9) при $æ = æ_j$ $(j = 1,2)$ соответственно.

Решение задачи (3), (5) представим в виде

$$u_1 = \sum_{j=1}^{2}\exp(k\,æ_j\alpha)\left(u_0^{(j)}/2 + \sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}^{(j)}\cos 2mk\beta\right)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{2}\exp(k\,æ_j\alpha)\sum_{m=1}^{\infty} v_{2m}^{(j)}\sin 2mk\beta \tag{14}$$

$$u_3 = \sum_{j=1}^{2} \exp(k æ_j \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} w_{2m-1}^{(j)} \cos(2m-1)k\beta$$

Здесь $u_{2m}^{(j)}$, $v_{2m}^{(j)}$, $m=\overline{0,\infty}$ – значения u_{2m}, v_{2m} из (7) при æ=æ$_j$ соответственно. Заметим, что

$$\frac{u_3^{(j)}}{R} = \frac{k\varepsilon}{2} \exp(k æ_j \alpha) \left[w_1^{(j)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(w_{2m-1}^{(j)} + w_{2m+1}^{(j)} \right) \cos 2mk\beta \right] \tag{15}$$

Подставляя (14) в (5) и учитывая (15), придем к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{A_m^{(j)}}{c_{2m}^{(j)}} \left(w_{2m-1}^{(j)} + w_{2m+1}^{(j)} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{B_m^{(j)}}{c_{2m}^{(j)}} \left(w_{2m-1}^{(j)} + w_{2m+1}^{(j)} \right) = 0, \qquad m=\overline{0,\infty} \tag{16}$$

где

$$A_m^{(j)} = æ_j^2 a_{2m}^{(j)} - 4m^2 \sigma b_{2m}^{(j)} - \sigma c_{2m}^{(j)}$$

$$B_m^{(j)} = 2m æ_j \left(a_{2m}^{(j)} + b_{2m}^{(j)} \right), \quad w_{-1} = w_1 \tag{17}$$

а $a_{2m}^{(j)}$, $b_{2m}^{(j)}$, $c_{2m}^{(j)}$ – значения a_{2m}, b_{2m}, c_{2m} из (7) при æ=æ$_j$ соответственно.

Нетривиальное решение системы (16) можно получить, например, следующим образом. Возьмем $w_1^{(j)} = w_3^{(j)} = \ldots = w_{2m-1}^{(j)} = 0$, $j=1,2$, находим нетривиальное решение системы

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{A_m^{(j)}}{c_{2m}^{(j)}} w_{2m+1}^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{2} \frac{B_m^{(j)}}{c_{2m}^{(j)}} w_{2m+1}^{(j)} = 0 \tag{18}$$

а остальные неизвестные находим по формулам

$$w_{2(m+i)+1}^{(j)} = (-1)^i w_{2m+1}^{(j)}, \quad j=1,2, \quad i=\overline{1,\infty} \tag{19}$$

Чтобы система (18) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$A_m^{(1)} B_m^{(2)} - A_m^{(2)} B_m^{(1)} = \left(1-\sigma^2\right) m (æ_2 - æ_1) \times$$

$$\times \left\{ \gamma_1 æ_1^2 æ_2^2 + \gamma_2 æ_1 æ_2 + \gamma_3 \left(æ_1^2 + æ_2^2 \right) + \gamma_4 \right\} = 0 \quad m=\overline{1,\infty} \tag{20}$$

где

$$\gamma_1 = 2\left[8(1+\sigma) m^2 - \sigma\eta^2 \right], \quad \gamma_2 = -\eta^2 \left(8m^2 + \sigma\eta^2 \right)$$

$$\gamma_3 = 2\sigma\eta^2 \left(4m^2 - \eta^2 \right), \quad \gamma_4 = \sigma\eta^4 \left(4m^2 - \eta^2 \right) \tag{21}$$

Уравнения (20) эквивалентны уравнениям

$$\gamma_1 æ_1^2 æ_2^2 + \gamma_2 æ_1 æ_2 + \gamma_3 \left(æ_1^2 + æ_2^2 \right) + \gamma_4 = 0, \quad m=\overline{1,\infty} \tag{22}$$

которые являются дисперсионными уравнениями задачи (1), (5).

Справедливы следующие утверждения:

1.При фиксированном m и при всех η, удовлетворяющих неравенствам

$$\varepsilon\sqrt{2(1+\sigma)} < \eta < 2m \tag{23}$$

уравнение $Q_m = 0$ имеет два отрицательных корня

$$æ_1^{(m)} = -\left(4m^2 - \eta^2\right)^{1/2}, \quad æ_2^{(m)} = -\left[4m^2 - (1-\sigma)/2\eta^2\right]^{1/2} \tag{24}$$

2.При достаточно малом ε и при условии (23) уравнение (11) имеет два $æ^2$ - формальных решения вида

$$æ_j^2 = \left(æ_j^{(m)}\right)^2 + \alpha_j^{(m)}\varepsilon^2 + \beta_j^{(m)}\varepsilon^4 + \ldots, \quad j = 1,2 \tag{25}$$

где

$$\alpha_1^{(m)} = 4m^2\left(æ_1^{(m)}\right)^2 / \eta^4, \quad \alpha_2^{(m)} = \left(8m^2 + \sigma\eta^2\right)^2 / \left(4\eta^4\right) \tag{26}$$

Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго утверждения, в уравнении (12) возьмем $n = m$ и в зоне (23) корни уравнения (12) ищем в виде

$$æ_{jm}^2 = \left(æ_j^{(m)}\right)^2 + \alpha_j^{(m)}\varepsilon^2 + \beta_j^{(m)}\varepsilon^4 + \ldots, \quad j = 1,2 \tag{27}$$

Подставляя (27) в (12), учитывая (13) и приравнивая к нулю коэффициенты при ε^2, получим формулы (26).

Легко заметить, что коэффициенты при ε^2 в (27) не изменяются, если использовать в (12) определители более высокого порядка, чем $m+1$. Таким образом, доказаны формулы (25) с достоверными значениями $\alpha_1^{(m)}$ и $\alpha_2^{(m)}$.

Используя выражение (25), дисперсионные уравнения (22) запишутся в виде

$$\left(8m^2 + \sigma\eta^2\right)æ_1^{(m)}\left\{æ_1^{(m)}\left[8(1+\sigma)m^2 - \eta^2\right] - \eta^2 æ_2^{(m)}\right\} +$$
$$+ \varepsilon^2\left\{\gamma_1\left[\alpha_1^{(m)}\left(æ_2^{(m)}\right)^2 + \alpha_2^{(m)}\left(æ_1^{(m)}\right)^2\right] + \gamma_2/2\left(\alpha_1^{(m)}æ_2^{(m)}/æ_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)}æ_1^{(m)}/æ_2^{(m)}\right) +\right.$$
$$\left. + \gamma_3\left(\alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)}\right)\right\} + O\left(\varepsilon^4\right) = 0, \qquad m = \overline{1,\infty} \tag{28}$$

где постоянная в O-члене не зависит от m. При $\varepsilon \to 0$ уравнения (28) приводятся к уравнениям

$$æ_1^{(m)}\left[8(1+\sigma)m^2 - \eta^2\right] - \eta^2 æ_2^{(m)} = 0, \qquad m = \overline{1,\infty} \tag{29}$$

которые эквивалентны соответствующим дисперсионным уравнениям Рэлея для пластинки [6], [7].

$$\left(2 - \eta^2/4m^2\right)^4 = 16\left(1 - \eta^2/4m^2\right)\left[1 - (1-\sigma)\eta^2/\left(8m^2\right)\right], \quad m = \overline{1,\infty} \tag{30}$$

В табл.1 приведены значения $\eta/(2m)$ (безразмерная характеристика собственной частоты задачи (1), (5)) в зависимости от m и ε при $\sigma = 1/3$. Для решения уравнения (22) используются приближенные формулы

$$æ_j^2 = \left(æ_j^{(m)}\right)^2 + \alpha_j^{(m)}\varepsilon^2, \qquad j = 1,2 \tag{31}$$

Численные расчеты подтверждают тот факт, что при малых ε значения $\eta/(2m)$, $m = \overline{1,\infty}$ в гофрированной пластинке (при отсутствии жесткости на изгиб) хорошо аппроксимируются фазовыми скоростями волн типа Рэлея для пластинки.

Таблица 1

m	$\eta/(2m)$			
	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=1$	$\varepsilon=1/2$	$\varepsilon=1/10$
1	0,91940	0,92293	0,92041	0,91944
2	-"-	0,91966	0,91947	0,91940
3	-"-	0,91945	0,91941	0,91940
4	-"-	0,91942	0,91941	0,91940
5	-"-	0,91941	0,91940	0,91940
6	-"-	0,91940	0,91940	0,91940
7	-"-	0,91940	0,91940	0,91940

ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне "релеевского" типа. - Акуст. журн., 1960, т.6, вып.1, с.124-126.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. - ПМ, 1994, т.30, №2, с.61-68.
3. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик М.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979. 383 с.
4. Гулгазарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки. - Изв. НАН РА, Механика, 1996, т.49, №1, с.61-70.
5. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т.1. - М.: Физматгиз, 1963. 342 с.
6. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке.- В сб.: Волновые задачи механики, Нижний Новгород: 1992, с.87-93.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. 575с.

Армпединститут им. Х.Абовяна
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.04.1997