

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
 СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ¹

Գասպարյան Ա.Է., Խաչատրյան Ա.Ա.

Հ ե Գասպարյան, Ա Ա Խաչատրյան

Փոփոխական կալիվածքով ձողերի երկայնական տատանումներին նվիրված որոշ խնդիրներ

Լուծվում են փոփոխական կալիվածքով ձողերի երկայնական տատանումների խնդիրներ, կոբ ձողերի ընդլայնական կալիվածքների մակերևույթը փոփոխվում են երկու տարբեր խոնրկյալների ընտանիքներով: Ստացվում են համադրության թանձեր տեղափոխությունների համար հասարակում են բխյալին կալիվածքներ:

H. E. Gasparyan, A. A. Khachatryan

Some problems on longitudinal vibrations of rods with variable cross-sections

Решены задачи о продольных колебаниях стержней, площади поперечных сечений которых меняются по двум различным семействам функций. Получены необходимые формулы и соотношения для перемещений. Рассмотрены числовые примеры.

В настоящей работе, являющейся как бы продолжением статьи [1], рассматриваются стержни, площади поперечных сечений которых по длине стержня изменяются по законам следующих двух семейств функции:

$$a) F_m(x) = F_0 \left(1 - \delta_m \frac{x}{l} \right)^m, \quad \delta_m = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$b) F_m(x) = F_0 \left(1 + \lambda_m \frac{x}{l} \right)^{-m}, \quad \lambda_m = \sqrt{k} - 1 = \sqrt{k} \delta_m \quad (1)$$

Здесь для каждого стержня, независимо от значения индекса

$$F'_{z_m}(0) = F'_0 = k F'_{z_m}(l), \quad (k > 1) \quad (2)$$

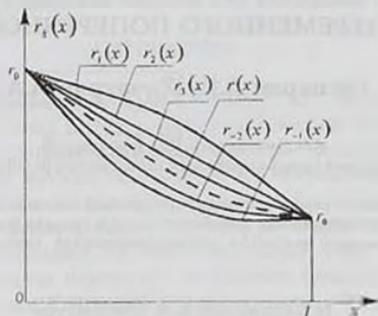
Предположим, стержни имеют форму тела вращения. При этом на фиг. 1 представлены примерные графики радиусов $r_m(x)$ поперечных сечений для некоторых значений m при $k = 16$. Здесь $r_1(x)$ — выпуклая кривая, $r_2(x)$ — прямая (случай усеченного конуса), все остальные — вогнутые.

Отметим, что для функций $r_{z_m}(x)$ в открытом интервале $(0 < x < l)$ имеют место следующие неравенства:

¹ Настоящая статья является исправленным вариантом статьи, опубликованной в журнале Изв. НАН РА "Механика" 1994, т. 47 №5-6, с. 14-23, в которой по вине редакции допущены ошибки, искажающие суть работы. Редакция

$$r_m(x) < r_{m-1}(x) < r(x) = r_0 \exp\left(-\frac{x}{l} \ln \sqrt{k}\right) < r_{m+1}(x) < r_m(x) \quad (3)$$

где $r(x)$ является предельным значением функций $r_m(x)$, когда $m \rightarrow \infty$ и представляет собой границу раздела двух рассматриваемых семейств. На фиг.1 график функции $r(x)$ представлен пунктирной линией. Отметим, что именно этот предельный случай достаточно подробно рассмотрен в [1].



Фиг. 1

Как известно, свободное продольное колебание стержней переменного поперечного сечения описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F'(x)}{F(x)} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

Здесь $u(x, t)$ — продольное перемещение точек стержня с координатой x в момент времени t ; $a^2 = E/\rho$, E, ρ — модуль упругости и плотность материала.

Для решения конкретных примеров к уравнению (4) присоединяются необходимые граничные и начальные условия.

Ниже рассматриваются задачи, где стержни (1), закрепленные в одном конце $x=0$, растянуты силой P и в момент времени $t=0$ внезапно освобождаются от силы, представив им свободно колебаться.

1. В этом пункте рассмотрим стержни $F_m(x)$ — первого семейства (1).

Подставляя в уравнение (4) значение $F_m(x)$ из (1), с заменой x на α

$$1 - \delta_m \frac{x}{l} = \alpha \quad \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \alpha \leq 1 \right) \quad (1.1)$$

и произведи разделение переменных $u_m(\alpha, t) = X(\alpha)T(t)$, получим

$$\frac{\delta_m^2}{X} \left(X'' + \frac{m}{\alpha} X' \right) = \frac{l^2}{a^2} \frac{T''}{T} = -\omega^2 \quad (1.2)$$

или

$$X'' + \frac{2p+1}{\alpha} X' + \frac{\omega^2}{\delta_m^2} X = 0 \quad \left(p = \frac{m-1}{2} \right)$$

$$T'' + \frac{\omega^2 a^2}{l^2} T = 0 \quad (1.3)$$

Общие решения уравнений (1.3) имеют вид

$$X(\alpha) = \alpha^{-p} \left[A_1 J_p \left(\frac{\omega}{\delta_m} \alpha \right) + A_2 Y_p \left(\frac{\omega}{\delta_m} \alpha \right) \right]$$

$$T(t) = A_3 \cos \frac{\omega a}{l} t + A_4 \sin \frac{\omega a}{l} t \quad (1.4)$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия следующие:

$$1) \text{ при } \alpha = 1 \quad u_m = 0, \quad 3) \text{ при } t = 0 \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

$$2) \text{ при } \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \frac{\partial u_m}{\partial \alpha} = 0 \quad 4) \text{ при } t = 0 \quad u_m = \frac{Pl}{2pEF_0 \delta_m} (\alpha^{-2p} - 1)$$

Из первых двух условий (1.5) имеем

$$A_1 J_p \left(\frac{\omega}{\delta_m} \right) + A_2 Y_p \left(\frac{\omega}{\delta_m} \right) = 0$$

$$A_1 J_{p+1} \left(\frac{\omega}{\lambda_m} \right) + A_2 Y_{p+1} \left(\frac{\omega}{\lambda_m} \right) = 0 \quad (1.6)$$

а из третьего условия $A_4 = 0$.

Из системы (1.6) для определения ω получаем следующее трансцендентное уравнение, которое имеет неограниченное количество корней ω_n ($n = 1, 2, \dots$):

$$J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_{p+1} \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) - Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_{p+1} \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$u_m(\alpha, t) = \alpha^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) - J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) \right] \cos \frac{\omega_n a}{l} t \quad (1.8)$$

Удовлетворив теперь четвертому условию (1.5), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) - J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) \right] = \frac{Pl}{2pEF_0 \delta_m} (\alpha^{-p} - \alpha^p) \quad (1.9)$$

Для определения величин B_n следует учесть, что здесь функции в квадратных скобках ортогональны в интервале $1/\sqrt{k} \leq \alpha \leq 1$ с весом α (доказательство не приводится).

После определения величин B_n и некоторых преобразований, окончательное решение задачи представим в виде

$$u_m(\alpha, t) = \frac{\pi P l k^{\frac{p-1}{m}}}{E F_0 \alpha^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)}{\omega_n \left[J_p^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) - J_{p+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) \right]} \times \\ \times \left[Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha\right) - J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha\right) \right] \cos \frac{\omega_n \alpha}{l} t \quad (1.10)$$

Отметим, что это решение верно для всех конечных значений $m = 1, 2, \dots$ ($p = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) несмотря на то, что в четвертом условии (1.5) случай $m=1$ ($p=0$) является особым и при отдельном его рассмотрении необходимо было бы произвести предельный переход $p \rightarrow 0$.

Из решения (1.10) можно получить соответствующее решение для стержня постоянного поперечного сечения ($k=1$). Но для этого следует учесть, что при $k \rightarrow 1$ аргументы функции Бесселя безгранично возрастают, так как при этом $\delta_m, \lambda_m \rightarrow 0$ и поэтому необходимо предварительно пользоваться их асимптотическими разложениями. Тогда трансцендентное уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$\cos \omega_n = 0, \quad \omega_n = (2n-1)\pi/2 \quad (1.11)$$

Далее в (1.10), пользуясь асимптотическими разложениями и учитывая (1.11), после перехода к переменной x и пределу $k \rightarrow 1$ получим известное решение рассматриваемой задачи для стержня постоянного поперечного сечения [2]

$$u(x, t) = \frac{8Pl}{\pi^2 E I_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x \cos \frac{2n-1}{2l} \pi \alpha t \quad (1.12)$$

Следует отметить, что при нечетных значениях $m = 1, 3, \dots$ индексы бесселевых функции целые числа, а при четных значениях $m = 2, 4, \dots$ указанные индексы принимают значения целое число плюс $1/2$. В последнем случае известно, что бесселевы функции выражаются через элементарные функции.

2. Теперь рассмотрим стержни $F_m(x)$ - второго семейства (1). Подставляя в уравнение (4) значение $F_m(x)$ из (1), с заменой x на β

$$1 + \lambda_m \frac{x}{l} = \beta \quad (1 \leq \beta \leq \sqrt[m]{k}) \quad (2.1)$$

и производя разделение переменных $u_m(\beta, t) = v_m(\beta, t) = Z(\beta)\Theta(t)$, получим

$$\frac{\lambda_m^2}{Z} \left(Z'' - \frac{m}{\beta} Z' \right) = \frac{l^2}{a^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\Omega^2 \quad (2.2)$$

или

$$\begin{cases} Z'' + \frac{2q+1}{\beta} Z' + \frac{\Omega^2}{\lambda_m^2} Z = 0 \\ \Theta'' + \frac{\Omega^2 a^2}{l^2} \Theta = 0 \quad \left(q = -\frac{m+1}{2} = -p-1 \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Общие решения уравнений (2.3) имеют вид

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \beta^{-q} \left[C_1 J_q \left(\frac{\Omega}{\lambda_m} \beta \right) + C_2 Y_q \left(\frac{\Omega}{\lambda_m} \beta \right) \right] \\ \Theta(t) &= C_3 \cos \frac{\Omega a}{l} t + C_4 \sin \frac{\Omega a}{l} t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия следующие:

$$1) \text{ при } \beta = 1 \quad v_m = 0, \quad 3) \text{ при } t = 0 \quad \frac{\partial v_m}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

$$2) \text{ при } \beta = \sqrt{k} \quad \frac{\partial v_m}{\partial \beta} = 0 \quad 4) \quad v_m(\beta, 0) = \frac{Pl}{2qEF_0 \lambda_m} (1 - \beta^{-2q})$$

Поступая аналогично первому пункту, получим следующее трансцендентное уравнение относительно Ω_n ($n = 1, 2, \dots$)

$$J_q \left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) Y_{q+1} \left(\frac{\Omega_n}{\delta_m} \right) - Y_q \left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) J_{q+1} \left(\frac{\Omega_n}{\delta_m} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Тогда общее решение можно представить в виде

$$v_m(\beta, t) = \beta^{-q} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[Y_q \left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) J_q \left(\frac{\Omega_n}{\delta_m} \beta \right) - J_q \left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) Y_q \left(\frac{\Omega_n}{\delta_m} \beta \right) \right] \cos \frac{\Omega_n a}{l} t \quad (2.7)$$

Прежде чем перейти к определению величин D_n , преобразуем трансцендентное уравнение (2.6). Учитывая, что $q = -p-1 < 0$ и пользуясь известными формулами перехода от отрицательных к положительным индексам бесселевых функций, уравнение (2.6) приводится к виду

$$J_p \left(\frac{\Omega_n}{\delta_m} \right) Y_{p+1} \left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) - Y_p \left(\frac{\Omega_n}{\delta_m} \right) J_{p+1} \left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Из сравнения уравнений (2.8) и (1.7) следует, что

$$\Omega_n = \omega_n \quad (2.9)$$

Таким образом, имеет место любопытный факт, что в поставленной здесь задаче для стержней обоих семейств (1), определяемых одним и тем же значением m , их собственные числа совпадают.

После удовлетворения четвертому условию (2.5) и учитывая (2.9), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[Y_q \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) J_q \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta \right) - J_q \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) Y_q \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta \right) \right] = \frac{Pl}{2qEF_0 \lambda_m} (\beta^q - \beta^{-q}) \quad (2.10)$$

Пользуясь ортогональностью функции в квадратных скобках (2.10) с весом β в интервале $1 \leq \beta \leq \sqrt{k}$, определяем коэффициенты D_n , после чего общее решение задачи будет

$$v_m(\beta, t) = \frac{\pi P l k^{-\frac{q+1}{m}}}{E F_0 \beta^q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_{q+1}\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)}{\omega_n \left[J_q^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) - J_{q+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) \right]} \times \\ \times \left[Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) - J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) \right] \cos \frac{\omega_n \alpha t}{l} \quad (2.11)$$

После перехода от отрицательных к положительным индексам бесселевых функций, окончательное решение задачи принимает вид

$$v_m(\beta, t) = \frac{\pi P l k^{-\frac{q}{m}}}{E F_0} \beta^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)}{\omega_n \left[J_p^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) - J_{p+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) \right]} \times \\ \times \left[Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) - J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) \right] \cos \frac{\omega_n \alpha t}{l} \quad (2.12)$$

Отметим, что результат (1.12), полученный для стержней постоянного поперечного сечения из (1.10), получается аналогичным образом также и из (2.12).

3. Выше было показано, что в рассматриваемой задаче для обоих семейств стержней (1) трансцендентное уравнение одно и то же (1.7). Корни этого трансцендентного уравнения ω_n зависят от параметров m и k , то есть $\omega_n = \omega_n(m, k)$.

Рассмотрим частные случаи ($m = 2$ и $m = 4$), при которых бесселевы функции выражаются через элементарные функции

а) $m = 2$ ($p = 1/2$)

В этом случае из (1) имеем $\delta_2 = 1 - 1/\sqrt{k}$, $\lambda_2 = \sqrt{k} - 1 = \sqrt{k} \delta_2$.

Обозначив $\omega_n(2, k) = \xi_n(k)$, из (1.7) получим

$$J_{1/2}\left(\frac{\xi_n}{\delta_2}\right) Y_{3/2}\left(\frac{\xi_n}{\lambda_2}\right) - Y_{1/2}\left(\frac{\xi_n}{\delta_2}\right) J_{3/2}\left(\frac{\xi_n}{\lambda_2}\right) = 0 \quad (3.1)$$

Отсюда, после замены бесселевых функции соответствующими их выражениями, получим

$$\operatorname{tg} \xi_n = -\xi_n / \lambda_2 \quad (3.2)$$

Здесь очевидно, что интересующие нас положительные корни трансцендентного уравнения (3.2) находятся в следующих интервалах:

$$(2n-1)\frac{\pi}{2} < \xi_n < n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

Они расположены ближе к левому краю и по мере возрастания n приближаются к левому значению (3.3).

В табл.1 приведены значения нескольких корней $\xi_n(k)$ уравнения (3.2) при двух значениях k ($k=2, k=10$)

Таблица 1

n	$\xi_n(2)$	$\xi_n(10)$	n	$\xi_n(2)$	$\xi_n(10)$
1	1,7973	2,3209	4	11,0331	11,1865
2	4,7985	5,1125	5	14,1664	14,2874
3	7,9062	8,1144	6	17,3026	17,4024

В общих решениях (1.10) и (2.12), произведя необходимые замены и некоторые преобразования с учетом (3.2), соответственно получим

$$u_2(\alpha, t) = \frac{2\sqrt{k}P\lambda_2}{EF_0\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n^2(\lambda_2^2 + \cos^2 \xi_n)} \sin \frac{\xi_n}{\delta_2} (1-\alpha) \cos \frac{\xi_n a}{l} t \quad (3.4)$$

$$v_2(\beta, t) = \frac{2kP\lambda_2}{EF_0} \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2(\lambda_2^2 + \cos^2 \xi_n)} \cos \frac{\xi_n}{\lambda_2} (\beta - \sqrt{k}) \cos \frac{\xi_n a}{l} t \quad (3.5)$$

б) $m=4, (p=3/2)$

В этом случае из (1) имеем $\delta_4 = 1 - 1/\sqrt[3]{k}, \lambda_4 = \sqrt[3]{k} - 1 = \sqrt[3]{k}\delta_4$. Обозначив $\omega_n(4, k) = \eta_n(k)$, из (1.7) получим

$$J_{3/2}\left(\frac{\eta_n}{\delta_4}\right) Y_{5/2}\left(\frac{\eta_n}{\lambda_4}\right) - Y_{3/2}\left(\frac{\eta_n}{\delta_4}\right) J_{5/2}\left(\frac{\eta_n}{\lambda_4}\right) = 0 \quad (3.6)$$

После соответствующих преобразований, трансцендентное уравнение (3.6) принимает вид

$$\operatorname{tg} \eta_n = -\frac{\eta_n}{\delta_4} \frac{\eta_n^2 - 3\delta_4 \lambda_4^2}{(3\lambda_4 + 2)\eta_n^2 + 3\lambda_4^2} \quad (3.7)$$

Для того, чтобы иметь четкое представление о корнях этого уравнения, необходимо исследовать его правую часть как функцию от η

$$f(\eta) = -\frac{\eta}{\delta_4} \frac{\eta^2 - 3\delta_4 \lambda_4^2}{(3\lambda_4 + 2)\eta^2 + 3\lambda_4^2} \quad (3.8)$$

Прежде всего отметим, что эта функция нечетная, а нас интересует ее поведение только при положительных значениях η .

Приведем некоторые характерные данные из результатов исследования функции (3.8).

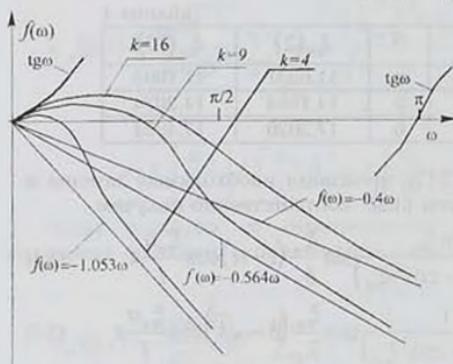
Функция (3.8) с возрастанием η возрастает от нуля (причем $f'(0) = 1$), принимая свое максимальное значение $f'(\eta) = 0$ при

$$\eta = \lambda_4 \left\{ \frac{6\delta_4}{\sqrt{(3\sqrt[3]{k} + \delta_4)^2 - 4\delta_4 + 3\sqrt[3]{k} - \delta_4}} \right\}^{1/2}$$

затем убывает, обращаясь в нуль при $\eta = \eta^* = \lambda_4 \sqrt{3\delta_4}$.

Имеем точку перегиба ($f''(\eta) = 0$) при $\eta = 3\lambda_4 / \sqrt{3\lambda_4 + 2}$ и асимптоту с уравнением

$$f(\eta) = \frac{\eta}{(3\lambda_4 + 2)\delta_4}$$



Фиг.2

На фиг.2 представлены графики функции (3.8) при трех значениях k ($k = 4; 9; 16$). Интересно также отметить, что при $k \leq 24$ $\eta^* < \pi/2$.

Из приведенных здесь данных о функции (3.8) нетрудно заключить, что корни η_n трансцендентного уравнения (3.7), аналогично ξ_n , находятся в интервалах (3.3).

В табл.2 приведены значения нескольких

корней уравнения (3.7) при двух значениях k ($k = 2, k = 10$)

Таблица 2

n	$\eta_n(2)$	$\eta_n(10)$	n	$\eta_n(2)$	$\eta_n(10)$
1	1,7982	2,3603	4	11,0326	11,1659
2	4,7976	5,0853	5	14,1660	14,2701
3	7,9057	8,0885	6	17,3024	17,3879

Рассматривая значения корней $\xi_n(k)$ (при $m = 2$) и η_n (при $m = 4$), можно отметить, что при одном и том же значении k они мало отличаются друг от друга (в особенности при $k = 2$).

Что же касается решений $u_4(\alpha, t)$ и $v_4(\beta, t)$, хотя они после преобразований выражаются через элементарные функции, здесь не будем приводить из-за громоздкости их выражений.

ЛИТЕРАТУРА

- Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А. О продольных колебаниях стержней с переменными поперечными сечениями. - Изв.АН Армении, Механика, 1993, т.46, №3-4, с.36-41.
- Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Физматгиз, 1959. 440 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
6.04.1993