ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **52, №1, 1999** Механика

УДК 531.36

МИНИМАКСНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Матасов А.И., Мартиросян С.Р.

Ա.Ի. Մատասով, Ս.Ռ. Մարտիրոսյան
Իներցիալ նավիգացիոն համակարգերի կանխագուշակման մինիմաքսային ալգորիթմներ

Մինիմաքսային կանխագուշակման խնդրի լուծման համար օգտագործվել են երաշխավորված գնահատման տեսության մեթոդները

A.I.Matasov, S.R.Martirosian
Minimax algorythms of prognostication parameters of the inertial guidance systems

В предлагаемой работе излагается решение задачи прогнозирования параметров инерциальной навигационной системы с помощью дополнительной информации, доставляемой радиосистемами ближней или дальней навигации при неполной информации о вероятностных характеристиках ошибок измерений. Данная работа продолжает [1].

1. Оптимальный гарантирующий подход к решению задачи прогнозирования параметров линейной динамической системы.

Рассмотрим линейный динамический объект

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in [0, T_n], \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^m$ - вектор состояния объекта, $A(t) \in R^{m \times m}$ - кусочно-непрерывная матричная функция.

Пусть на интервале времени $[0, T]$, $T < T_n$ проводятся измерения компонент фазового вектора объекта

$$z(t) = H^T(t)x(t) + \rho(t), \quad t \in [0, T] \tag{1.2}$$

где $H(t) \in R^m$ - кусочно-непрерывная вектор-функция, $z(t)$ - непосредственно измеряемая величина, $\rho(t)$ — ошибка измерений, $z(t), \rho(t) \in R^1$.

Предполагается, что ошибка измерений $\rho(t)$ удовлетворяет следующим вероятностным гипотезам:

1. Математическое ожидание $M\rho(t) = 0$

2. Дисперсия процесса неизвестна: $M\rho^2(t) = \sigma^2(t)$, а известно только, что $\sigma(t) \le \sigma$, где σ — известная постоянная величина.

3. Корреляционная функция $M\rho(t)\rho(s) = \sigma(t)\sigma(s)r(t,s)$ неизвестна. Известно только, что автокорреляционная функция $r(t,s)$ удовлетворяет ограничениям: $|r(t,s)| \le 1$.

Требуется построить линейную несмещенную оценку скалярной величины $l = a^T x(T + \alpha)$, где $a \in R^m$ - заданный вектор, $\alpha \in [0, T_n - T]$

Представим измерения (1.2) в виде

$$z(t) = \tilde{H}^T(t,\alpha)q + \rho(t), \; t \in [0,T] \tag{1.3}$$

где $q = x(T+\alpha) \in R^m$ – вектор параметров объекта,

$\tilde{H}(t,\alpha) = \left[\Gamma^{-1}(T+\alpha)\right]^T \Gamma^T(t)H(t) \in R^m$, $\Gamma(t) \in R^{m\times m}$ – матрица фундаментальной системы решений (1.1)

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = A(t)\Gamma(t), \; \Gamma(0) = I_m$$

I_m - m-мерная единичная матрица.

Будем строить оценку величины l с помощью линейных оценивателей $\hat{l}$ вида

$$\hat{l} = \int_0^{T+\alpha} z(t)\Phi(t,\alpha)dt \tag{1.4}$$

$$\text{где } \Phi(t,\alpha) = \Phi_H(t,\alpha) + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \delta(t - t_j) \tag{1.5}$$

$\Phi_H(t)$ – кусочно-непрерывная функция, Φ_j, $j = \overline{1,n}$ – числа (n – произвольно).

Из условия

$$\Phi(t,\alpha) = 0, \; t \in (T, T_n) \tag{1.6}$$

очевидно следует, что

$$\int_0^{T+\alpha} z(t)\Phi(t,\alpha)dt = \int_0^{T} z(t)\Phi(t,\alpha)dt \tag{1.7}$$

В соответствии с (1.7) ошибка оценки, очевидно, задается выражением

$$\hat{l} - l = q^T\left[\int_0^T \tilde{H}(t,\alpha)\Phi(t,\alpha)dt - a\right] + \int_0^T \Phi^T(t,\alpha)\rho(t)dt$$

Задача оптимального гарантированного (минимаксного) прогнозирования состоит в нахождении оценивателя $\Phi^0(t,\alpha)$ из условия

$$\min_{\Phi(t,\alpha)} \max_{|r(t,s)|\le 1} M\left(\hat{l} - l\right)^2 \tag{1.8}$$

$$t, s \in [0,T], \; \alpha \in [0, T_n - T]$$

В такой постановке исходная задача сводится к задаче определения оценивателя $\Phi^0(t,\alpha)$ из решения следующей задачи математического программирования [1-3]:

$$\sigma \int_0^T |\Phi(t,\alpha)| dt \to \min_{\Phi(t)} \tag{1.9}$$

$$\int_0^T \tilde{H}(t,\alpha)\Phi(t,\alpha)dt = a, \; \alpha \in [0, T_n - T] \tag{1.10}$$

Для получения аналитического решения задачи математического программирования (1.9), (1.10) можно воспользоваться алгоритмом, описанным в [1].

2.Решение задачи прогнозирования параметров продольного канала корректируемой инерциальной навигационной системы.

Исследуем продольный канал уравнений ошибок корректируемой инерциальной навигационной системы, установленной на борту объекта, движущегося с крейсерской скоростью по траекториям, близким к ортодромии.

Продольный канал на интервалах времени, в течение которых производится коррекция, описывается уравнениями [4].

$$\dot{\gamma}=\mu,\ \dot{\varphi}=\mu-\vartheta,\ \dot{\mu}=-\varphi,\ \dot{\vartheta}=0 \qquad (2.1)$$

Здесь $\dot{(\ )}\equiv\dfrac{d}{d\tau}$, $\tau=\omega_0 t$ - безразмерное время, ω_0 - частота Шулера: $\omega_0^2=g/a$, g — гравитационное ускорение, a — радиус Земли, t — размерное время; γ — угловая ошибка определения местоположения в продольном направлении; $\varphi=\alpha-\varepsilon^0, \alpha$ — угловая ошибка приборной вертикали в продольном направлении, ε^0 - постоянная приведенная погрешность продольного ньютонометра; $\mu=\Delta v/a\omega_0$, Δv - ошибка определения скорости в продольном направлении; $\vartheta=v/\omega_0$, v — постоянный дрейф гироплатформы в продольном направлении.

Сторонняя позиционная информация, дополняющая уравнения (2.1), имеет вид [4].:

$$z(\tau)=\gamma(\tau)+\rho(\tau),\ \tau\in[0,T],\ T\le\frac{\pi}{2} \qquad (2.2)$$

где $z(\tau)$ - непосредственно измеряемая величина, $\rho(\tau)$ - ошибка измерения - произвольно кореллированный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и с ограниченной дисперсией:

$M\rho(\tau)=0,\ M[\rho(\tau)]^2\le\sigma^2$, σ - известная величина.

Требуется построить линейные несмещенные оценки фазовых переменных системы (2.1) в момент времени $\tau=T+\alpha$, $\alpha\in[0,\pi-T]$, $T\le\dfrac{\pi}{2}$ по измерениям (2.2).

Перейдем к новым обозначениям.

Представим измерения (2.1) в виде

$$z(\tau)=\tilde{H}^T(\tau,\alpha)q+\rho(\tau),\ \tau\in[0,T]$$

где $q=x(T+\alpha)=(\gamma(T+\alpha),\varphi(T+\alpha),\mu(T+\alpha),\vartheta(T+\alpha))^T$ - вектор параметров объекта, $\tilde{H}(\tau,\alpha)=\exp\{A^T(\tau-T-\alpha)\}h_1$, $h_1=(1,0,0,0)^T$,

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&-1\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\tilde{H}(\tau,\alpha)=$$
$$=\left(1,\cos(T+\alpha-\tau)-1,-\sin(T+\alpha-\tau),\sin(T+\alpha-\tau)-(T+\alpha-\tau)\right)^T \qquad (2.3)$$

Применяя для решения задачи математического программирования (1.9), (1.10), в которой $\tilde{H}(\tau,\alpha)$ задается соотношением (2.3), а целевые векторы определяются выражениями $a_1=(1,0,0,0)^T$, $a_2=(0,1,0,0)^T$, $a_3=(0,0,1,0)^T$, $a_4=(0,0,0,1)^T$, соответствующих оцениванию параметров $\gamma(T+\alpha)$, $\varphi(T+\alpha)$, $\mu(T+\alpha)$, $\vartheta(T+\alpha)$ соответственно, лемму и ее следствие, сформулированных в [1], можно показать, что оптимальное решение задачи (1.9), (1.10) строится в виде

$$\Phi_s^0(\tau,\alpha)=\sum_{j=1}^{4}\Phi_{sj}^0\delta\left(\tau-\tau_j^*\right),\quad s,j=\overline{1,4} \tag{2.4}$$

где Φ_{sj}^0, $s,j=\overline{1,4}$ - весовые коэффициенты алгоритмов оценивания; τ_j^*, $j=\overline{1,4}$ - оптимальные моменты измерений, определяемые равенствами

$$\tau_1^*=0,\quad \tau_2^*=\chi,\quad \tau_3^*=T-\chi,\quad \tau_4^*=T,$$

χ - решение уравнения.

$$\sin\left(\chi-\frac{T}{2}\right)+(T-\chi)\cos\left(\chi-\frac{T}{2}\right)-\sin\frac{T}{2}=0,\quad \chi\in\left(0,\frac{T}{2}\right),\quad T\le\frac{\pi}{2}$$

Весовые коэффициенты Φ_{sj}^0, $s,j=\overline{1,4}$ подсчитываются из условий несмещенности (1.10), или в соответствии с (2.4)

$$N\Phi_s^0=a_s,\quad s=\overline{1,4} \tag{2.5}$$

$$N=\left(\tilde{H}(0,\alpha),\tilde{H}(\chi,\alpha),\tilde{H}(T-\chi,\alpha),\tilde{H}(T,\alpha)\right) \tag{2.6}$$

$\tilde{H}(\tau,\alpha)$ задается соотношением (2.3); $\Phi_s^0=\left(\Phi_{s1}^0,\Phi_{s2}^0,\Phi_{s3}^0,\Phi_{s4}^0\right)^T$, $a_s=\left(0,\ldots,\overset{s}{1},0,\ldots,0\right)^T$, $s=\overline{1,4}$.

Непосредственной подстановкой (2.3) в (2.6) легко убедиться, что $\det N\neq 0$ при всех $\alpha\in[0,\pi-T]$, $T\le\frac{\pi}{2}$, откуда, очевидно, следует единственность оптимальных алгоритмов оценивания

Оптимальные гарантированные среднеквадратические значения отклонений ошибок оценок параметров $\gamma(T+\alpha)$, $\varphi(T+\alpha)$, $\mu(T+\alpha)$, $\vartheta(T+\alpha)$ равны, соответственно, величинам:

$$d_{opt}(\gamma)=2\left[\left(\frac{T}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-\sin\left(\frac{T}{2}+\alpha\right)\right]\sigma\cdot\delta$$

$$d_{opt}(\varphi)=2\left[\sin\left(\frac{T}{2}+\alpha\right)\right]\sigma\cdot\delta$$

$$d_{opt}(\mu)=2\left[\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-\cos\left(\frac{T}{2}+\alpha\right)\right]\sigma\cdot\delta$$

$$d_{opt}(\vartheta)=2\left[\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)\right]\sigma\cdot\delta$$

$$\delta=\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)^{-1}$$

Оптимальные гарантированные оценки параметров $\gamma(T+\alpha)$, $\varphi(T+\alpha)$, $\mu(T+\alpha)$, $\vartheta(T+\alpha)$, определяемые задачей (1.9), (1.10) и обозначаемые дополнительной звездочкой, имеют вид

$$\begin{pmatrix} \gamma^*(T+\alpha) \\ \varphi^*(T+\alpha) \\ \mu^*(T+\alpha) \\ \vartheta^*(T+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^0_{11} & \Phi^0_{12} & \Phi^0_{13} & \Phi^0_{14} \\ \Phi^0_{21} & \Phi^0_{22} & \Phi^0_{23} & \Phi^0_{24} \\ \Phi^0_{31} & \Phi^0_{32} & \Phi^0_{33} & \Phi^0_{34} \\ \Phi^0_{41} & \Phi^0_{42} & \Phi^0_{43} & \Phi^0_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z(\chi) \\ z(T-\chi) \\ z(T) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Оценки (2.7), очевидно, могут быть легко реализованы. В силу линейности задачи выражения для оценок и ошибок оценок при переходе к размерным переменным умножаются на соответствующий масштабный множитель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матасов А.И., Мартиросян С.Р. Минимаксные алгоритмы позиционной коррекции инерциальных навигационных систем. - Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1988, №2.
2. Белоусов Л.Ю., Крупень В.Я. О некоторых асимптотических оценках начальных параметров при измерении дальности. - Космические исследования, Т.12, 1984, №2.
3. Лидов М.Л. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке. - Космические исследования, Т.22, 1984, №4.
4. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. -М.: Изд. МГУ, 1982.

МГУ им.М.В.Ломоносова
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
07.07.1997