

МГД – ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ЛАМИНАРНОЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ
ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ
ПОВЕРХНОСТЬЮ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ ВО ВНЕШНЕМ
ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Безиргенян Г.С.

Գ.Ս Ինճիլզեցյան

Ազատ մակերևույթով անսեղմելի հեղուկների ՄՀԳ հարթ զուգահեռական իլոթերնոմ լամինար շարժումը և նրա կայունությունը արտաքին լայնական համասեռ մագնիսական դաշտում

Վերնագրում նշված խնդիրը հետազոտված է անճնշումային ՄՀԳ սարքի տարրերի հոսանքային ռեժիմների դեպքում որոշված են հիմնական շարժումը բնութագրող մեծությունները: Հաշված են ՄՀԳ սարքի քաղցրոլունակությունը և դիմադրության գործակիցը նրկար այլընտանցիկ մոտավորությունում ցանկացած հոսանքային ռեժիմի համար որոշված է հիմնական շարժման կայունության սլայմանը, որում հաշվի են առնված Ռենոլդսի մագնիսական բովոլ սլայմանավորված գումարելիները:

G.S. Bezirgenyan

Plane parallel laminar isothermal flow of incompressible fluids and its stability in a homogeneous transverse magnetic field

Упомянутая в заглавии задача исследуется при разных токовых режимах работы безапорного МГД-устройства. Определены МГД-величины, характеризующие основное течение. Вычислены пропускная способность и сопротивление безапорного МГД-устройства. Получено условие устойчивости в длинноволновом приближении с учетом слабеющих, обусловленных магнитным числом Рейнольдса

Следует отметить, что имеется большое количество работ (они цитированы, в частности, [1]) по определению сопротивления ламинарных и турбулентных напорных МГД-течений (движение в трубах и закрытых каналах) несжимаемых проводящих потоков, но в то же время они отсутствуют для безнапорных МГД-течений.

Задачи гидродинамической устойчивости наиболее детально изучены для параллельных течений непроводящих вязких жидкостей в линейной постановке. Известно [2-5], что изучение этих задач сводится к нахождению собственных значений уравнения Орра-Зомерфельда при соответствующих граничных условиях.

В случае проводящей жидкости (при приложенном магнитном поле), как показано в работах [6-7], она сводится к нахождению собственных значений системы двух уравнений, одно из которых четвертого порядка, а другое - второго порядка.

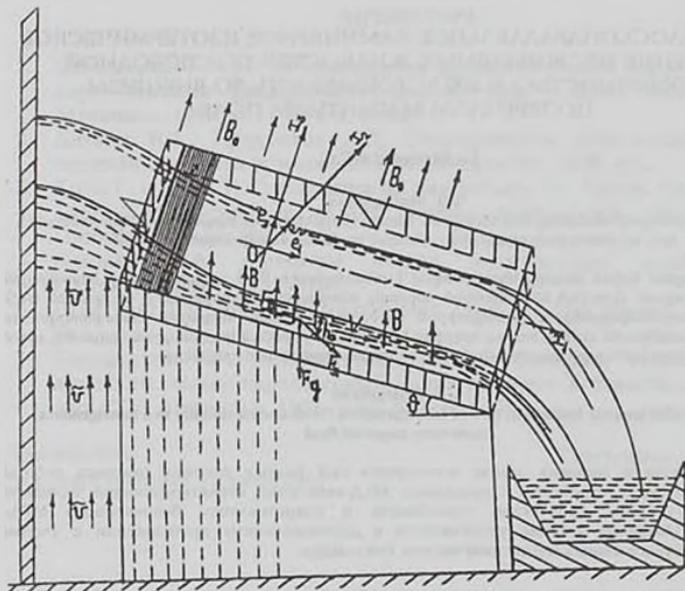
В работе [7] задача устойчивости плоскопараллельного ламинарного течения вязкой жидкости в поперечном магнитном поле исследована в частном случае энергетического режима (режим холостого хода). Получено условие устойчивости в длинноволновом безиндукционном приближении.

1. **Постановка задачи.** При решении вышесформулированной задачи делается допущение; МГД-лоток настолько длинный и широкий, что концевыми эффектами можно пренебречь. В выбранной системе координат (фиг. 1) МГД-характеристики рассматриваемого течения, согласно сделанному допущению, удовлетворяют условиям:

$$a) \vec{V} = (u(x_1), 0, 0), \quad p = p(x_1), \quad h = h_0 = \text{const}.$$

$$\vec{B} = (b_{10}(x_3), 0, B_0 + b_{30}(x_3))$$

б) $h_0/l, h_0/L \ll 1$, где l и L — соответственно поперечный и продольный размеры МГД-лотка¹, а остальные обозначения указаны на фиг. 1.



Фиг. 1

На основании условий а) и б) основная система уравнений МГД запишется в следующей форме:

$$\eta \frac{d^2 u}{dx_3^2} - \sigma B_0^2 u + \sigma E_0 B_0 + \rho g \sin \vartheta = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{dp}{dx_3} + \sigma(E_0 - uB_0)b_{10} + \rho g \cos \vartheta = 0, \quad \frac{db_{10}}{dx_3} = \mu_0 \sigma(E_0 - uB_0) \quad (1.2a-б)$$

Систему уравнений (1.1) и (1.2a-б) необходимо решать при следующих граничных условиях:

$$\text{на дне лотка } V=0, \quad b_{10}=0, \quad b_{30}=0 \quad (1.3a-в)$$

(Дно лотка конструировано из немагнитного, непроводящего материала — футеровано [8]);

$$\text{на свободной поверхности } \tau_{31} = 0, \quad \Pi_{33} = \Pi_{33}^{(0)}, \quad b_{10} = b_{1e}, \quad b_{30} = b_{3e}, \quad (1.4a-г)$$

где $\tau_{31} = \eta u_{,31} = \eta du/dx_3$, η — динамический коэффициент вязкости,

$\Pi_{ij} = \sigma_{ij} + T_{ij}$, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(u_{i,j} + u_{j,i})$ — вязкий тензор напряжений,

¹ В отличие от задачи устойчивости плоскопараллельного течения непроводящей жидкости вдоль наклонной плоскости, в рассматриваемой задаче необходимо проводящий поток ограничить боковыми стенками для корректности постановки задачи в отношении токовых режимов.

$T_{ij} = H_i B_j - 1/2 H_k B_k \delta_{ij}$ - тензор напряжений Максвелла, а δ_{ij} - символы Кронекера. Индексом e обозначены значения соответствующих величин во внешней среде.

Следует отметить, что система уравнений (1.1), (1.2а-б) не замкнута. Чтобы замкнуть эту систему, необходимо либо задавать условия токовых режимов работы МГД-устройства, либо решить связанную задачу.

2. Решение системы уравнений (1.1)-(1.2а-б). Ее решение при граничных условиях (1.3а-в), (1.4а,б) записывается в форме:

$$u = C \left[1 - \frac{\text{ch}Ha(1-x_3)}{\text{ch}Ha} \right], \quad v = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} u dx_3 = C \frac{f(Ha)}{HachHa} \quad (2.1а-б)$$

$$U = \frac{u}{v} = \frac{Ha}{f(Ha)} [\text{ch}Ha - \text{ch}Ha(1-x_3)], \quad p = p_h + p_m$$

$$p_h = p_c + \rho g(1-\bar{x}_1) \cos \vartheta.$$

$$\bar{p}_m = (K-1)^2 - \left\{ (K-1)\bar{x}_3 - \frac{1}{f(Ha)} [\text{sh}Ha(1-\bar{x}_3) + (\bar{x}_3-1)\text{sh}Ha] \right\}^2 \quad (2.2)$$

$$\bar{b}_{10} = Re_m \left[(K-1)\bar{x}_3 - \frac{(\bar{x}_3-1)\text{sh}Ha + \text{sh}Ha(1-\bar{x}_3)}{f(Ha)} \right] \quad (2.3)$$

где $f(Ha) = HachHa - \text{sh}Ha$, $C = 1/\sigma B_0^2 (\sigma E_0 B_0 + \rho g \sin \vartheta)$, $\bar{x}_3 = x_3/h_0$.

$Ha = h_0 B_0 \sqrt{\sigma/\eta}$ - число Гартмана, p_h - гидростатическое давление,

$\bar{p}_m = 2\rho_m \mu_0 / Re_m^2 B_0^2$ - магнитное давление, $E_0 = \text{const}$, $K = E_0/v B_0$ - параметр МГД-нагрузки лотка, который характеризует его токовые режимы [9], $\bar{b}_{10} = b_{10}/B_0$, $Re_m = \sigma \mu_0 h_0 v$ - магнитное число Рейнольдса.

Решения уравнений электродинамики для среды, контактирующей со свободной поверхностью проводящей жидкости, когда она является диэлектриком (воздух) и простирается до бесконечности с учетом граничного условия (1.4б,г), записываются в форме: $b_{e3} = 0$, $b_{e1} = (K-1)Re_m$. Следовательно, условие затухания возмущений магнитного поля на бесконечности может иметь место только при $K=1$, что соответствует токовому режиму холостого хода лотка ([9], с.87).

Но в общем случае не обязательно, чтобы внешняя среда (непосредственно контактирующей с жидкостью) была диэлектриком и простиралась до бесконечности. Например, она может быть плазмой (термоядерный реактор - ТЯР типа "ТОКАМАК" [10]). В этом случае

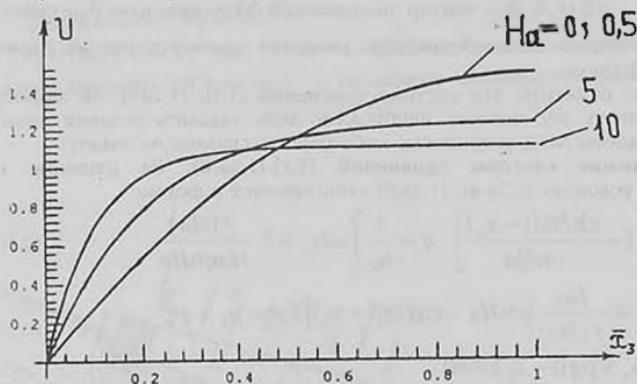
$\nabla \times \vec{B}_e = \mu_0 \vec{j}_e$ и параметр K может принимать разные значения.

Из полученных формул следует несколько МГД-эффектов:

1) на графике профилей скоростей (U, x_3) имеется весьма характерный узкий интервал; для любого значения Ha при $0,4 \leq \bar{x}_3 \leq 0,5$ происходит их пересечение и в этом интервале $U \approx 1$, ($1,08 \leq U \leq 1,16$), то есть течение происходит со средней скоростью;

2) до этого интервала приложенное магнитное поле приводит к разгону потока;

3) за отмеченным интервалом имеет место интенсивное торможение потока приложенным магнитным полем и впоследствии выравнивание поля скоростей (фиг. 2);



Фиг. 2

3а. Пропускная способность и коэффициент сопротивления лотка.

Для расчета пропускной способности лотка следует в плоскости $x_2 O x_3$ взять сечение с шириной l и высотой h_0 . Тогда $Q = Av = AC_f(Ha)/Nach Ha$, $q = h_0 C_f(Ha)/Nach Ha$, где $A = h_0 l$ - площадь сечения, а q - удельный расход. Из полученной формулы следует:

1) для идеально проводящей жидкости пропускная способность лотка становится постоянной величиной (при $\sigma \rightarrow \infty$ $Q \rightarrow AE_0/B_0$, а $q \rightarrow h_0 E_0/B_0$);

2) при $B_0 \rightarrow \infty$ или $q \rightarrow 0$ происходит запираание лотка. Согласно определению коэффициента МГД-сопротивления

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho v^2} = \frac{2}{\rho v^2} \left. \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \frac{2}{Re} \frac{Ha^2 \operatorname{sh} Ha}{f(Ha)}$$

Из полученной формулы в случае непроводящей жидкости следует, что

$$c_{f0} = \frac{6}{Re}$$

В технической гидромеханике вместо c_{f0} используют коэффициент гидравлического сопротивления (или коэффициент Дарси): $\lambda_0 = 4c_{f0}$. Это значение λ_0 при ламинарном режиме движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью по наклонной плоскости хорошо известно. Аналогично для проводящей жидкости: $\lambda = 4c_f$. (Для больших чисел Гартмана $Ha \gg 1$, $\lambda \approx 8Ha/Re$).

Сопоставление значений λ_0 и λ показывает, что приложенное однородное поперечное магнитное поле значительно увеличивает сопротивление МГД-лотка, что хорошо известно для напорных течений [1].

Функциональная зависимость коэффициента сопротивления в общем случае движения проводящей жидкости со свободной поверхностью, при произвольной ориентации приложенного магнитного поля приведена в работе [11].

3б. Разные токовые режимы. а) Режим холостого хода ($K = 1$).

электроэнергия не отводится и не подводится). Интегральный ток по поперечному сечению равен нулю:

$$I = \int_0^{h_0} j_2 dx = \sigma v B_0 h_0 \left(K - \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} v dx_3 \right) = \sigma v B_0 h_0 (K - 1) = 0$$

Электрические токи замыкаются в жидкости. (Об этом режиме выше уже было написано).

б) Режим короткого замыкания: $K = 0$, $E_0 = 0$ и $j = -\sigma v B_0$. Весь ток течет в отрицательном направлении оси Ox_2 . При этом режиме на свободной поверхности: $\bar{x}_3 = 1$, $b_1 = -Rc_m$, то есть возмущенное поле выходит в наружу и оказывает обратное влияние на приложенное.

в) Режим генератора: $0 < K < 1$ (электроэнергия отводится) и режим насоса: $K < 0$, $K > 1$ (электроэнергия подводится). При этих режимах электрические токи текут соответственно в отрицательном и положительном направлениях оси Ox_2 и замыкаются вне жидкости (на стенках). В обоих режимах индуцированное магнитное поле оказывает обратное влияние на приложенное.

На основании проведенных расчетов полученные распределения величин \bar{b}_{10}/Re и $2\rho_m \mu_0 / B_0^2 Rc_m$ в потоке показывают:

1. В токовом режиме короткого замыкания ($K = 0$) наведенное магнитное поле $\bar{b}_{10} \leq 0$ и с увеличением значений числа Ha по абсолютной величине растет, а при холостом ходе ($K = 1$), наоборот, убывает ($\bar{b}_{10} > 0$);

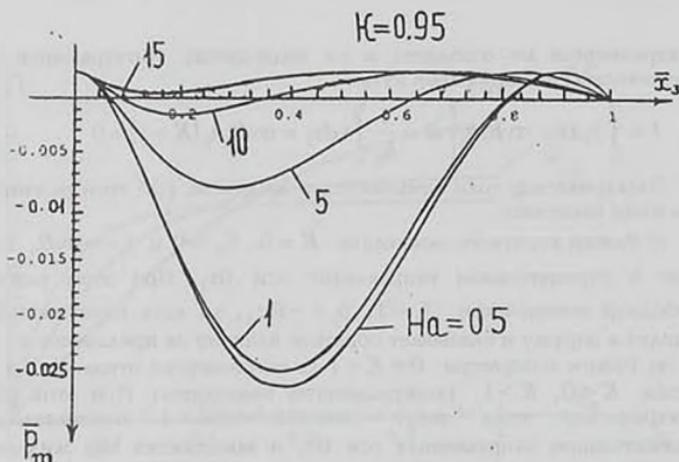
2. При одном и том же генераторном режиме $0 < K < 1$ имеются два подинтервала: $0 \leq \bar{x}_3 \leq \bar{x}_{30}$, $\bar{x}_{30} < \bar{x}_3 \leq 1$, $\left((1/Re_m) \bar{b}_{10}(Ha, K, \bar{x}_{30}) = 0 \right)$, в первом из которых $\bar{b}_{10} \geq 0$, а во втором $\bar{b}_{10} < 0$ и с увеличением значений числа Ha в первом убывает, а во втором по абсолютной величине растет. (Значения \bar{x}_{30} определяются из решения трансцендентного уравнения:

$$[f(Ha)(K-1) - \text{sh}Ha]z + \text{sh}Ha \cdot z + f(Ha)(K-1) = 0, \quad z = \bar{x}_3 - 1$$

(с увеличением K значения z растут).

3. При $Ha = \text{const}$ для насосных режимов: $K < 0$ и $K < 1$ соответственно при убывании K ($|K|$ - растет) $\bar{b}_{10} < 0$ - убывает ($|\bar{b}_{10}|$ - растет), а при возрастании K , $\bar{b}_{10} > 0$ - растет.

4. В случае $0 < K < 1$ для значений магнитного давления $\bar{p}_m = \bar{p}_m(Ha, K, \bar{x}_3)$ имеются два существенно разных интервала значений K : $(0; 0,2)$ и $(0,2; 1)$. В первом \bar{p}_m монотонно убывает как по \bar{x}_3 , так и по Ha . В интервале $(0,2; 1)$ кривые $\bar{p}_m = \bar{p}_m(Ha, K, \bar{x}_3)$ осциллируют. При $Ha \leq 12$ осцилляции практически исчезают, а значения $|\bar{p}_m|$, резко убывая, приближаются к значению $0,25 - 0,25\bar{x}_3^2$. Когда значения K приближаются к единице, осцилляции сохраняются (конечно, постепенно ослабевая) до значений $Ha \approx 15$. С увеличением Ha , $|\bar{p}_m|$ резко убывает и уже при $Ha = 10$, $\max\{|\bar{p}_3(10, 1, \bar{x}_3)|\} < 0,005$ (фиг. 3).



Фиг. 3

В генераторных режимах близко к холостому ходу полное давление в МГД-течениях со свободной поверхностью распределяется почти по гидростатическому закону.

При насосных режимах: $K > 1$ и $K < 0$ и фиксированном числе Ha с увеличением $|K|$ магнитное давление в МГД-лотке растет.

4. Устойчивость плоскопараллельного ламинарного течения. Возмущения МГД-характеристик течения проводящей вязкой жидкости по лотку при приложенном внешнем поперечном магнитном поле считаются малыми, а возмущенное течение плоским [2]. Так что задача устойчивости изучается в плоской, линейной постановке.

В таком случае возмущенные характеристики МГД-течения можно представить в форме:

$$V_1 = u_0(x_3) + u_1(t, x_1, x_3), \quad V_3 = u_3(t, x_1, x_3), \quad h = h_0 + \zeta(t, x_1)$$

$$p = p_0(x_3) + p_1(t, x_1, x_3)$$

$$\vec{B} = [b_{10}(x_3) + b_1(t, x_1, x_3)]\vec{e}_1 + [B_0 + b_3(t, x_1, x_3)]\vec{e}_3$$

где u_1, u_3 - компоненты возмущенной скорости, ζ - возвышение свободной поверхности, $b_i (i = 1, 3)$ - возмущенные компоненты наведенного в жидкость магнитного поля. Для однородности обозначений через $u_0(x_3)$ обозначена скорость прямолинейно параллельного течения, а через $p_{m0} = p_{h0} + p_{m0}$ (p_{h0} - гидростатическое давление, а p_{m0} определяется по формуле (2.2)).

Согласно сделанному допущению исходные уравнения плоского нестационарного МГД-течения можно линеаризировать (из-за недостатка места система линеаризованных уравнений не приводится).

Упомянутую систему уравнений необходимо решать при граничных условиях: (1.3а-в) и (1.4а-г), к которым необходимо присоединить линеаризованное кинематическое условие

$$u_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \quad \text{при } x_3 = h_0 + \zeta(t, x_1) \quad (4.1)$$

(Конечно, в (1.4г) вместо b_{30} необходимо писать b_3).

Следует расшифровать граничное условие (1.4б). На свободной поверхности значения: Π_{33} и Π_{33}^e обозначим сверху индексом s , а остальные величины - снизу индексом s . Тогда, используя выражения σ_{33} , τ_{33} и T_{33} , и произведя линеаризацию, можно написать:

$$\Pi_{33}^s = -p_s + 2\eta \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_s + \frac{1}{2\mu_0} (B_0^2 + 2B_0 b_3 - b_{10}^2 - 2b_{10} b_1) \Big|_s$$

где p_s - значение полного давления на возмущенной свободной поверхности, то есть $p_s = p|_{x_3=h_0+\zeta} = p_0 + p_1$. Согласно формуле (2.2)

$$p_0 = p_e - \rho g h_0 \bar{\zeta} \cos \vartheta - \frac{1}{\mu_n} \text{Re}_m^2 B_0^2 (K-1) \left[K-1 + \frac{1}{f(Ha)} (\text{sh}Ha - Ha) \right]$$

Для внешней среды (она считается невязкой)

$$\Pi_{33}^e = -p_e + \frac{1}{2\mu_0} (B_0^2 + 2B_0 b_{e3} - b_{e0}^2 - 2b_{e0} b_{e1}) \Big|_s$$

Подставляя выражение p_s в Π_{33}^s и используя граничное условие (1.4б), с учетом условий непрерывности магнитного поля, на поверхности раздела легко получить

$$p_1 = \rho g h_0 \bar{\zeta} \cos \vartheta + \text{Re}_m^2 \frac{B_0^2}{\mu_0} (K-1) \left[K-1 + \frac{1}{f(Ha)} (\text{sh}Ha - Ha) \right] \quad (4.2)$$

Система линеаризованных уравнений МГД-плоского нестационарного течения проводящей жидкости в приложенном поперечном магнитном поле, как показано в [5-7], сводится к системе связанных уравнений четвертого относительно u_1 и второго относительно b_1 порядков. Решения этих уравнений ищутся в форме

$$\frac{u_1}{v} = \psi(\bar{x}_1) \exp \left\{ ik \left[\bar{x}_1 - \frac{v}{h_0} \bar{\alpha} t \right] \right\}, \quad \frac{b_1}{B_0} = \varphi(\bar{x}_1) \exp \left\{ ik \left[\bar{x}_1 - \frac{v}{h_0} \bar{\alpha} t \right] \right\}$$

После подстановки этих выражений в упомянутые уравнения получится:

$$\begin{aligned} \psi^{IV} - 2k^2 \psi + k^4 \psi - ik \text{Re}_m [(U - \alpha)(\psi - k^2 \psi) - U \psi] = \\ = - \frac{Ha^2}{\text{Re}_m} [\varphi - k^2 \varphi + ik b_{10} (\varphi - k^2 \varphi) - ik b_{10} \varphi] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\varphi - k^2 \varphi = - \text{Re}_m [\psi + ik b_{10} \psi - ik (U - \alpha) \varphi] \quad (4.4)$$

(Здесь и далее черточки над соответствующими буквами опускаются).

Граничные условия (1.4а), (4.1) и (4.2) через функции φ , ψ и ζ_0

($\zeta = \zeta_0 \exp\{ik(x_3 - v/h_0 t)\}$) записываются в следующей форме:

$$\psi(0) = \psi(1) = 0, \quad \psi(1) - ik[U(1) - \alpha]\zeta_0 = 0 \quad (4.5a-b)$$

$$\psi(1) + k^2 \psi(1) + \frac{ikHa^2}{f(Ha)} \zeta_0 = 0 \quad (4.6)$$

$$\psi(1) - 3k^2 \psi(1) + \frac{Ha^2}{\text{Re}_m} [\varphi(1) - k^2 \varphi(1)] -$$

$$-ik \left\{ \operatorname{Re}[(U - \alpha)\psi - U\psi] + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} b_{10} \varphi \right\} \Big|_{x_3=1} = k^2 W_0 \zeta_0 \quad (4.7)$$

$$\text{где } W_0 = \frac{1}{\eta\nu} \left\{ \rho g h_0 \cos \vartheta + \frac{B_0^2}{\mu_0} (K - 1) \left[K - 1 - \frac{1}{f(Ha)} (\operatorname{sh} Ha - Ha) \right] \right\}$$

Следует отметить, что в граничных условиях (4.5в)-(4.7) значения $\psi(1 + \zeta_0)$, $\varphi(1 + \zeta_0)$ и их производных были спожены на невозмущенную поверхность раздела $x_3 = 1$, то есть $\psi(1 + \zeta_0)$, $\varphi(1 + \zeta_0)$ и ее производные были разложены в ряды по степеням ζ_0 и приравнены слагаемые одного порядка. (Если считать, что $\psi(1) = 0(k\zeta_0)$, то тогда согласно граничному условию (4.5в) $\psi(1) = 0$, а $\psi(1) = ik[U(1) - \alpha]$, что противоречит тому, что при отсутствии возмущений свободной поверхности должны отсутствовать и возмущения скорости). Для дальнейших вычислений удобно из (4.5в) определить ζ_0 и подставить в (4.6) и (4.7).

В конце параграфа также следует отметить, что при решении системы уравнений (4.3), (4.4) в том приближении, которое в дальнейшем рассматривается, не возникает необходимости удовлетворения граничным условиям (1.4в-г), то есть отпадает необходимость в решении связанной (внутренней и внешней) задачи.

5. Асимптотические решения системы (4.3), (4.4) в длинноволновом приближении. Условие устойчивости. В рассматриваемом приближении все искомые величины разлагаются в ряды по степеням k ($k \ll 1$)

$$\psi = \psi_0 + k\psi_1 + \dots, \quad \varphi = \varphi_0 + k\varphi_1 + \dots, \quad \alpha = \alpha_0 + k\alpha_1 + \dots$$

Подстановка этих разложений в систему уравнений (4.3), (4.4) и граничные условия (4.5а-в), (4.6) и (4.7) в основном порядке $O(1)$ приводит к решению системы уравнений

$$\psi_0'' + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 + \operatorname{Re}_m \psi_0 = 0 \quad (5.1а,б)$$

при следующих граничных условиях:

$$\psi(0) = \psi_0(0) = 0, \quad \left[\frac{Ha(\operatorname{ch} Ha - 1)}{f(Ha)} - \alpha_0 \right] \psi_0(1) + \frac{Ha^3}{f(Ha)} \varphi_0(1) = 0$$

$$\psi(1) + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} \varphi(1) = 0 \quad (5.2а-г)$$

Решение уравнения (5.1а), из которого исключен φ_0 (с использованием (5.1б)), удовлетворяющее граничным условиям (5.2а-г) (из последнего также ясно, что исключен $\varphi(1)$), записывается в виде

$$\psi_0 = C_0 [\operatorname{ch} Ha x_3 - 1], \quad C_0 = \text{const} \quad (5.3)$$

После подстановки найденного решения в (5.2в) определяется значение α

$$\alpha_0 = \frac{Ha \operatorname{ch}^2 Ha - 1}{\operatorname{ch} Ha f(Ha)} \quad (5.4)$$

Подставляя решение (5.3) в уравнение (5.1б) с использованием формы решения для b_3 и граничных условий (1.3в-г), можно получить

$$\varphi_0 = -C_0 \operatorname{Re}_m \left[\frac{\operatorname{sh} Ha x_1}{Ha} - x_1 \right] \quad (5.5)$$

Следует отметить, что в [7] после долгой полемики так и не приведена форма решения для φ_0 , поскольку в первом приближении в уравнении для φ_1 отброшены слагаемые порядка Re_m , содержащие φ_0 , то есть рассмотрено безиндукционное приближение.

С удержанием слагаемых $O(\operatorname{Re}_m)$ в первом приближении для определения ψ_1 и φ_1 из (4.3) и (4.4) получаются уравнения

$$\psi_1^{IV} + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} \varphi_1 = -\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} i(b_{10} \varphi_0 + b_{10} \varphi_0) + i \operatorname{Re} [(U - \alpha_0) \psi_0 - U \psi_0]$$

$$\varphi_1 = -\operatorname{Re}_m \{ \psi_1 + i [b_{10} \psi_0 + b_{10} \psi_0 - (U - \alpha_0) \varphi_0 - U \varphi_0] \}$$

которые необходимо решать при следующих граничных условиях:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1) = 0$$

$$\psi_1(1) + \frac{Ha^3}{f(Ha) U(1) - \alpha_0} \psi_1(1) - \frac{Ha^3 \psi_0(1)}{f(Ha)} \frac{\alpha_1}{[U(1) - \alpha_0]^2} = 0$$

$$\psi_1(1) + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} \varphi_1(1) = i \operatorname{Re} \{ [U(1) - \alpha_0] \psi_0(1) - U(1) \psi_0(1) \} +$$

$$+ i \left[\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} b(1) \varphi_0(1) - \frac{\psi_0(1)}{U(1) - \alpha_0} W_0 \right]$$

$$W_0 = \frac{1}{\eta v} \left[\rho g h_0 \cos \vartheta + \frac{B_0^2}{\mu_0} \operatorname{Re}_m (K - 1) \left(K - 1 - \frac{\operatorname{sh} Ha - Ha}{f(Ha)} \right) \right]$$

После соответствующих вычислений для ψ_1 получается уравнение:

$$\psi_1^{IV} - Ha^2 \psi_1 = i C_0 \frac{Ha^2}{\operatorname{ch} Ha - 1} \frac{\operatorname{Re}}{\gamma} \operatorname{th} Ha \operatorname{sh} Ha (x_1 - 1) + i C_0 \frac{2Ha^2}{\operatorname{ch} Ha - 1} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{Re}_m}{\gamma} \{ [Kf(Ha) x_1 + \operatorname{sh} Ha] \operatorname{sh} Ha x_1 +$$

$$+ \left[\frac{1}{2Ha \operatorname{ch} Ha} (Kf(Ha) \operatorname{ch} Ha - Ha \operatorname{sh} Ha) - x_1 \operatorname{sh} Ha \right] \operatorname{ch} Ha x_1 -$$

$$- \frac{1}{2Ha \operatorname{ch} Ha} [Kf(Ha) \operatorname{ch} Ha - Ha \operatorname{sh}^2 Ha] \}$$

Различие Re , Re_m и R , R_M обусловлено с выбором характерных скоростей, фигурирующих в этих безразмерных числах: $\operatorname{Re}/R = \operatorname{Re}_m/R_M = v/V_0 = \gamma$, где $\gamma = v/V_0 = f(Ha)/Ha(\operatorname{ch} Ha - 1)$. В качестве характерной скорости во всех курсах теоретической и технической гидромеханики принята средняя скорость.

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее соответствующим условиям, из-за громоздкости не приводится. В частности, для определения α_1 получается выражение

$$-i \frac{f(Ha)}{Ha} \operatorname{ch}^2 H \cdot \alpha_1 = \frac{\operatorname{Re}}{\gamma} \frac{\operatorname{th} Ha}{2Ha(\operatorname{ch} Ha - 1)} \left(3 \operatorname{ch}^2 Ha - \frac{3}{Ha} \operatorname{sh} Ha \operatorname{ch} Ha - \operatorname{sh}^2 Ha \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -i \frac{f(Ha)}{Ha} \operatorname{ch}^2 Ha \alpha_1 = \frac{\operatorname{Re}}{\gamma} \frac{\operatorname{th} Ha}{2Ha(\operatorname{ch} Ha - 1)} \left(3 \operatorname{ch}^2 Ha - \frac{3}{Ha} \operatorname{sh} Ha \operatorname{ch} Ha - \operatorname{sh}^2 Ha \right) - \\
& - \frac{f(Ha)}{Ha^2} \operatorname{ch} Ha \operatorname{sh} Ha \operatorname{ctg} \vartheta + \operatorname{Re}_m \left\{ \frac{K}{2Ha^2} [-5Ha \operatorname{ch} Ha \operatorname{sh} Ha + 2 \operatorname{ch} Ha \times \right. \\
& \times (Ha^2 \operatorname{ch} Ha + 2 \operatorname{ch} Ha - 2)] + \\
& + \frac{\operatorname{th} Ha}{2Ha f(Ha)} [3Ha - (20 + 16 \operatorname{sh}^2 Ha - 5 \operatorname{ch} Ha + 4Ha^2 \operatorname{ch} Ha) \operatorname{sh} Ha + \\
& + 2Ha(6 + 7 \operatorname{sh}^2 Ha) \operatorname{ch} Ha] + \frac{\operatorname{sh} Ha - Ha}{Ha^2} [Kf(Ha) + (\operatorname{ch} Ha - 1) \operatorname{th} Ha] + \\
& + \frac{1}{Ha \operatorname{ch} Ha} [Ha \operatorname{sh}^3 Ha + (Ha - \operatorname{sh} Ha) \operatorname{ch}^2 Ha] - f(Ha) \frac{\operatorname{ch} Ha \operatorname{sh} Ha}{Ha^2} \operatorname{Be} \times \\
& \times (K - 1) \left[K - 1 - \frac{\operatorname{sh} Ha - Ha}{f(Ha)} \right] \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\text{где } \operatorname{Be} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho g h_0 \sin \vartheta}$$

Сразу следует отметить, что последнее слагаемое, входящее в выражение (5.6) (которое при холостом входе обращается в нуль), уже для умеренных $(3 \div 6) \cdot 10^{-2}$ тл приложенных магнитных полей играет существенную роль для устойчивости плоскопараллельных МГД-течений. Оно, начиная со значений $B_0 \geq (3 \div 6) \cdot 10^{-2}$ тл при токовых режимах: короткое замыкание, генераторный и насосный, существенно увеличивает диапазон устойчивости плоскопараллельных МГД-течений даже при магнитных числах Рейнольдса: $\operatorname{Re}_m = (4 \div 7,9) \cdot 10^{-3}$.

Для малых и больших значений числа Гартмана выражение α_1 (5.6) упрощается. Соответствующие асимптотические выражения α_1 не приводятся из-за понятной причины.

Если в выражении (5.6) отбросить слагаемые с множителем Re_m , которыми пренебрежены в [7], то полученное выражение, с учетом отмеченной разницы между R работы [7] и введенной в этой работе Re , совпадает с соответствующим выражением отмеченной работы.

Из формы решения видно, что устойчивость рассматриваемого плоскопараллельного МГД-течения с точностью первого приближения определяется знаком мнимой части $\alpha = \alpha_0 + k\alpha_1$, то есть знаком $\operatorname{Im} \alpha_1$ (α_0 - действительное число см. (5.4)). После приравнивания нулю выражения α_1 (5.6) получится точное уравнение нейтральной кривой, откуда определяется соответствующее значение числа Re/γ (или R). Уравнение $-i\alpha_1 = 0$ для проводящих жидкостей эквивалентно уравнению $[f(Ha)/Ha] \operatorname{ch}^2 Ha - i\alpha_1 = 0$, так как множитель при $i\alpha_1$ для значений $Ha > 0$ больше нуля.

В [7] в уравнении (29) для Ψ_1 отброшены слагаемые порядка $O(R_M)$, обоснуя это тем, что для всех представляющих интерес проводящих жидкостей соотношение R_M/R достаточно мало. Для ртути оно около $1,5 \cdot 10^{-7}$, а для натрия - $7,5 \cdot 10^{-6}$. (Неверно - должно быть $2,6 \cdot 10^{-5}$).

Поэтому для диапазона значений числа R , обычно встречающихся в ламинарных течениях, R_M очень мал. Непонятно, чтобы оценить порядок магнитного числа Рейнольдса для конкретных проводящих жидкостей, автор работы [7] рассматривает отношение R_M/R . Ведь R_M и R — независимые безразмерные величины (их отношение дает число Этчелора). Закон подобия жидких металлов определяется числами:

$$Fr, Ha, Re_m, Be, Re.$$

Таблица

Металлы		$T_m^{\circ}K$	σ		η	ρ	Ha
			$10^7(\text{см/м})$		10^{-3} (н.сек/м ²)	10^4кг/м^3	ЭЛ
1.	Литий	453	4.69		нет точных данных	0.5	—
2.	Галий	303	3.68		1.99	6.093	22÷430
3.	Алюминий	934	5.08		2.97	2.382	21÷414
4.	Ртуть	234	1.24		1.91	13.52	13÷255
5.	Натрий	371	10.37		0.686	0.925	62÷1229
6.	Медь	1357	10.61		2.06	8.217	36÷718
7.	Цинк	693	2.68		3.24	6.48	14÷288
8.	Калий	337	7.43		0.515	0.83	60÷1202
9.	Олово	505	2.10		1.91	6.84	17÷332
10.	Железо	1808	1.067		7.4	7.1	6÷120
Металлы		Re_m		Be			
		ЭЛ	КУ	ЭЛ	КУ	КУ	
		$\times 10^{-2}$		$\vartheta = 2^{\circ}$ $\times 10^3$	$\vartheta = 10^{\circ}$ $\times 10^2$	$\vartheta = 2^{\circ}$ $\times 10^6$	
1.	Литий	5.91	1.77	113.4÷450	228÷910	37.8	
2.	Галий	4.637	1.39	26.9÷37	1.87÷75	3.1	
3.	Алюминий	6.4	1.92	2.38÷95	50÷192	7.93	
4.	Ртуть	1.56	0.47	0.418÷16.7	0.841÷33.7	1.4	
5.	Натрий	13.06	3.93	61.3÷245	308÷490	20.43	
6.	Медь	13.37	4.01	0.69÷27	1.39÷55.6	2.3	
7.	Цинк	3.37	1.01	0.87÷35	1.76÷70	2.92	
8.	Калий	9.36	2.81	68.3÷273	137÷550	22.8	
9.	Олово	2.65	0.79	0.83÷33	1.67÷67	2.76	
10.	Железо	1.34	0.4	0.8÷31.9	1.61÷64	2.66	

Примечание I. С увеличением температуры вязкость жидкого алюминия резко падает, в то время электропроводность уменьшается незначительно. При $T = 1073^{\circ}K$, $\eta = 1.4 \cdot 10^{-3}$ н·сек/м². $Ha = 602$

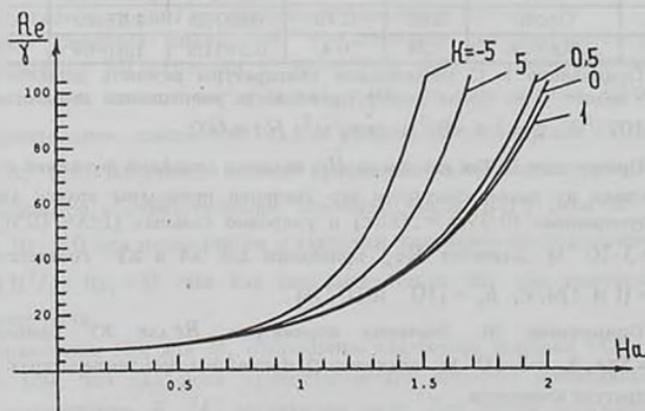
Примечание II. Так как число Ha является линейной функцией от Be и h_0 , то исходя из целесообразности его значения приведены только для ЭЛ при слабоумеренных ($0.05\tau_L = 500\text{гс}$) и умеренно сильных ($1\tau_L = 10^4\text{гс}$) полей и $h_0 = 3 \cdot 10^{-1}$ м. Значения Re_m приведены для ЭЛ и КУ соответственно при $v_0 = (1 \text{ и } 3)\text{м/с}$, $h_0 = (10^{-2} \text{ и } 10^{-3})\text{м}$.

Примечание III. Значения параметров Be для КУ приведены при $B_0 = 5\tau_L$, $h_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ м. Значения ρ приведены при температурах, близких к температуре плавления.

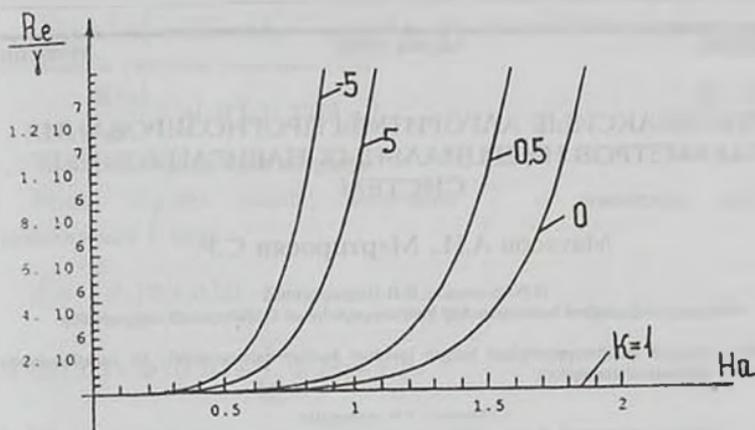
Для безнапорных МГД-устройств ("МГД-ЭЛ" [8], "КУ-ТОКОМАК" [10])

и применяемых в них ряде расплавленных металлов с использованием данных, приведенных в [12] для ρ , σ , $T_{II}^0 K$ (ст. 56, 305-307) и в [13] - для η (с. 357), в табличной форме приведены значения характерных МГД-параметров: Re , Re_m , Ha и Ve , необходимых для расчета уточненной нейтральной кривой. Она дает возможность при разных токовых режимах оценить погрешность безиндукционного приближения при определении диапазона значений числа Re (или $R = Re/\gamma$), для которых плоскопараллельные МГД-ламинарные течения в приложенном внешнем однородном поперечном поле будут устойчивыми.

В наихудшем случае: $K = 1$, при любой величине приложенного магнитного поля, угле дна МГД-устройства и значений Re_m , отмеченные кривые практически совпадают. При энергетических режимах, существенно отличных от холостого хода (генераторный, насосный, короткое замыкание), минимальное расхождение между уточненной нейтральной кривой устойчивости (в которой учтены слагаемые порядка $O(Re_m Ve(K-1))$) и нейтральной кривой устойчивости, приведенных в [7], очевидно, получается для минимальных значений безразмерных величин: Re_m , Ve . Из перечисленных в таблице жидких металлов, используемых (или предусмотренных использовать) в "МГД-ЭЛ" и "КУ-ТОКОМАК", минимальное значение Re_m получается для железа $4 \cdot 10^{-3}$, не представляющего практического интереса (для ртути получается чуть больше - $4,7 \cdot 10^{-3}$, а максимальное значение - для натрия $1,3 \cdot 10^{-1}$). Для одного и того же приложенного поля минимальное значение Ve получается для ртути $4 \cdot 10$ (для железа и олова - $8 \cdot 10$), а максимальное значение - для лития $4 \cdot 10^7$. Графики нейтральных кривых при разных токовых режимах (кроме $K = 1$) приведены для жидких металлов: ртуть и натрий соответственно при значениях параметров $Re_m = 4,7 \cdot 10^{-3}$, $Ve = 8,3$ ($B_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ тл), $\vartheta = 10^0$ и $Re_m = 13 \cdot 10^{-2}$, $Ve = 2,45 \cdot 10^5$ ($B_0 = 1$ тл), $\vartheta = 2^0$. Причем для нейтральной кривой устойчивости, приведенной в [7], положено: $Re_m = 0$, $Ve = 0$.



Фиг. 4



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. -Рига: Зинатне, 1976. 246 с.
2. Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. -М.: ВИНТИ, 1991. -25. -188с.
3. Лин Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. -М.: ИЛ, 1958. 194 с.
4. Гидродинамическая неустойчивость. -Сб. статей: М.: Мир, 1964. 372 с.
5. Chia-Shun Yin. Stability of Liquid Flow Down an Inclined Plane.//Physics of Fluids, 1963, Vol. 6, №3, p. 321-334.
6. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. -М.: Мир, 1964. 301 с.
7. Din-Yu Hsien. Stability of a Conducting Fluid Flowing Down an Inclined Plane in a Magnetic Field.// Physics of Fluids. -1966, Vol. 8, №10, p. 1785-1799.
8. Круминь Ю.К. Электромагнитные лотки. -Рига: Зинатне, 1973. 55 с.
9. Вулс Л.А., Генкин А.А., Фоменко Б.А. Теория и расчет магнитогазодинамических течений. -М.: Атомиздат, 1971. 383 с.
10. Карасев Б.Г., Лиелаусис О.А., Муравьев Е.В., Тананаев Л.В. Жидкие металлы в термоядерных реакторах с магнитным удержанием. Препринт - Саласпилс: АН Латв. ССР, Ин. Физики, 1987. 32 с.
11. Безиргеня Г.С. Изотермическое движение несжимаемой проводящей жидкости со свободной поверхностью во внешнем магнитном поле.//Магнитная гидродинамика, 1990, №1, с. 67-76.
12. Таблицы физических величин. Под редакцией Кикоина И.К. - М.:Атомиздат, 1976. 1005 с.
13. Брановер Г.Г. и Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. -М.: Наука, 1970. 379 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
02.12.1997