

УДК 532.516

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В
 КАНАЛЕ С ПОДВИЖНОЙ СТЕНКОЙ И С ПЕРЕПАДОМ
 ДАВЛЕНИЯ

Бабаджанян Г.А.

Գ.Հ. Բաբաջանյան

Իրական հեղուկի շիաստատված շարժումը շարժական պատով ջրաշրջանում ճնշման անկման առկայությամբ

Հողվածում քննարկվում է իրական անսեղմնի հեղուկի ոչ ստացվածար (չիաստատված) շարժումը հարթ հեղուկատարում. երբ շարժման ոչ ստացվածարությունը պայմանավորված է հեղուկատարի պատերից մեկի շարժումով և հեղուկի սեփական հոսքի առկայությամբ. Գրված խնդրի ուսումնասիրությունը պայման է մասնական ածանցյալներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը. Գտնվելով Լ.սայրսի ինտեգրալ ձևաչափությունից կառուցվում են հավասարման լուծումները, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշել շարժման ինտյագրիչ մեծությունների (արագության, ճնշման, չափման ուժի) փոփոխման որոշակիությունները կախված ժամանակից և տարածության կետի կոորդինատներից

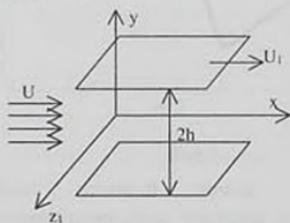
G.H. Babujanjan

Unsteady motion of viscous liquid in chanal with movable wall and differential pressure

В статье рассматривается нестационарное движение реальной несжимаемой жидкости в плоском канале. Нестационарность движения обусловлена движением одной из стенок канала и движением самой жидкости. Исследование поставленной задачи сведено к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Используются интегральное преобразование Лапласа, построены решения уравнений, которые дают возможность определять закономерности изменения скорости, давления и силы трения жидкости в зависимости от времени и координат.

1. Рассматривается развитие нестационарного изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с движущейся стенкой при наличии перепада давления, т.е. имеет место одновременное течение жидкости.

Исследования динамического взаимодействия таких движений вязкой жидкости с твердыми поверхностями (неподвижными и подвижными) помимо теоретического интереса имеют также и различные практические приложения.



Ֆիգ.1

Развитие только по времени движения вязкой жидкости между двумя параллельными движущимися плоскостями исследовалось в [1], где принималось, что жидкость и стенки в начале движения (при $t \leq 0$) находились в покое, а с момента времени (при $t > 0$) стенки перемещались с постоянными скоростями, увлекая за собой частицы жидкости. Были найдены законы изменения скорости частиц жидкости и силы трения, зависящие от времени и координат.

В настоящей работе рассматривается более общий случай. Вязкая жидкость, ограниченная двумя параллельными плоскостями на расстоянии $2h$ друг от друга в начале времени (при $t = 0$), движется с постоянной, равномерно распределенной в начальном сечении канала, скоростью U . В момент времени (при $t > 0$) одна из плоскостей начинает двигаться с

постоянной скоростью U_1 . Требуется определить развитие со временем и по координатам движения жидкости между плоскостями, при условии, что параллельные плоскости неограничены по осям ox и oz_1 , а движение одной из них происходит в своей плоскости (фиг. 1). Пренебрегая действием сил тяжести, для решения поставленной задачи в качестве исходных уравнений примем линеаризованные уравнения движения, получаемые из уравнений Навье-Стокса с частичным учетом слагаемых от ускорения и вязкости в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + U \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

В системе уравнений (1.1) v_x и v_y — соответствующие компоненты скорости потока по осям ox и oy , p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Приняв начало координат на оси симметрии канала, начальные и граничные условия задачи примут вид:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0, x = 0 & \quad v_x = U = \text{const}, \quad p = p_H = \text{const} \\ \text{при } t > 0, x > 0, y = h & \quad v_x = U_1 = \text{const}, \quad v_y = 0 \\ \text{при } t \geq 0, x > 0, y = -h & \quad v_x = 0, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где p_H — давление жидкости в начальном сечении канала.

Вводя новые переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad \xi = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad \Phi = \frac{p - p_H}{\rho U^2}, \quad T = \frac{U}{h} t$$

система уравнений (1.1) и краевые условия (1.2) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial T} + \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{R_c} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{при } T = 0, z = 0 \quad u = 0, \quad \Phi = 0$$

$$\text{при } T > 0, z > 0, \xi = 1 \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v = 0$$

$$\text{при } T \geq 0, z > 0, \xi = -1 \quad u = -1, \quad v = 0 \quad (1.4)$$

Применяя к уравнениям (1.3) и к краевым условиям (1.4) двойное преобразование Лапласа [2], получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} - R_c (s_1 + s_2) \bar{u} &= R_c s_1 \bar{\Phi} \\ \frac{d\bar{\Phi}}{d\xi} &= 0, \quad s_1 \bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\xi} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\text{при } T = 0, z = 0 \quad \bar{u} = 0, \quad \bar{\Phi} = 0$$

$$\text{при } T > 0, z > 0, \xi = 1 \quad \bar{u} = \frac{U_1 - U}{U} \frac{1}{s_1 s_2}, \quad \bar{v} = 0$$

$$\text{при } T \geq 0, z > 0, \xi = -1 \quad \bar{u} = -\frac{1}{s_1 s_2}, \quad \bar{v} = 0 \quad (1.6)$$

где s_1 и s_2 — параметры преобразования Лапласа по переменным z и T соответственно, $R_r = \frac{Uh}{v}$ — число Рейнольдса.

Общее решение первого уравнения системы (1.5) с учетом граничных условий (1.6) имеет вид:

$$\bar{u} = \frac{U_1 - U}{U} \frac{\text{sh}\beta(\xi + 1) + \text{sh}(\xi - 1)}{s_1 s_2 \text{sh}2\beta} + \frac{s_1 \bar{\Phi}}{s_1 + s_2} \left(\frac{\text{ch}\beta\xi}{\text{ch}\beta} - 1 \right) \quad (1.7)$$

где $\beta^2 = R_r (s_1 + s_2)$.

Из последних двух уравнений системы (1.5) с учетом граничных условий (1.6) для функции $\bar{\Phi}$ получим:

$$\bar{\Phi} = \frac{2U - U_1}{2U} \frac{(s_1 + s_2) \text{th}\beta}{s_1^2 s_2 (\text{th}\beta - \beta)} \quad (1.8)$$

Применяя двойное обратное преобразование Лапласа к уравнениям (1.7) и (1.8) и переходя к первоначальным переменным, для искомых величин v_x и p получим:

$$\begin{aligned} v_x = & U + \frac{U_1 - 2U}{2} \left\{ \frac{3y^2}{2h^2} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[1 - \frac{\cos \lambda_n y / h}{\cos \lambda_n} \right] \exp \left(-\frac{\lambda_n^2 v x}{Uh^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left[1 - \frac{\cos \mu_n y / h}{\cos \mu_n} \right] \left[\exp \left(-\frac{\mu_n^2 v t}{h^2} \right) - \exp \left(-\frac{\mu_n^2 v x}{Uh^2} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{U_1}{2} \left\{ \frac{y}{h} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi y / h}{n\pi} \exp \left(-\frac{h^2 \pi^2 v x}{Uh^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi y / h}{n\pi} \left[\exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 v t}{h^2} \right) - \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 v x}{Uh^2} \right) \right] \right\} \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = & p_H - \frac{\rho U^2}{2} \frac{2U - U_1}{U} \left\{ \frac{3vx}{Uh^2} + \frac{1}{5} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp \left(-\frac{\lambda_n^2 v x}{Uh^2} \right) - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left[\exp \left(-\frac{\mu_n^2 v t}{h^2} \right) - \exp \left(-\frac{\mu_n^2 v x}{Uh^2} \right) \right] + \frac{2v}{Uh^2} \sum_{n=1}^{\infty} (x - Ut) \exp \left(-\frac{\mu_n^2 v t}{h^2} \right) \right\} \quad (1.10) \end{aligned}$$

Из третьего уравнения системы (1.1) определим v_y :

$$\begin{aligned} v_y = & \frac{(U_1 - 2U)v}{Uh} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{y}{h} - \frac{\sin \lambda_n y / h}{\sin \lambda_n} \right] \exp \left(-\frac{\lambda_n^2 v x}{Uh^2} \right) - \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{y}{h} \frac{\sin \mu_n y / h}{\sin \mu_n} \right] \exp \left(-\frac{\mu_n^2 v x}{Uh^2} \right) \left. \right\} - \frac{U_1 v}{Uh} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \cos \frac{n\pi y}{h} - 1 \right] \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 v x}{Uh^2} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \cos \frac{n\pi y}{h} - 1 \right] \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 v x}{Uh^2} \right) \right\} \quad (1.11) \end{aligned}$$

В формулах (1.9)–(1.11) $\lambda_n = -i\sqrt{R_n x}$ и $\mu_n = -i\sqrt{R_n (s_1 + s_2)}$ являются действительными корнями уравнений $\text{tg} \lambda_n = \lambda_n$ и $\text{tg} \mu_n = \mu_n$.

Сила трения между слоями жидкости определяется по следующей формуле:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

В частном случае на верхней подвижной и на нижней неподвижной стенках силы трения будут:

$$\begin{aligned} \tau_{y=h} = & \frac{\mu(U_1 - 2U)}{2h} \left\{ 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 vx}{Uh^2}\right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{\mu_n^2 vt}{h^2}\right) - \exp\left(-\frac{\mu_n^2 vx}{Uh^2}\right) \right] \right\} + \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$+ \frac{\mu U_1}{2h} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 vx}{Uh^2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 vt}{h^2}\right) - \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 vx}{Uh^2}\right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \tau_{y=-h} = & -\frac{\mu(U_1 - 2U)}{2h} \left\{ 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 vx}{Uh^2}\right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{\mu_n^2 vt}{h^2}\right) - \exp\left(-\frac{\mu_n^2 vx}{Uh^2}\right) \right] \right\} + \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$+ \frac{\mu U_1}{2h} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 vx}{Uh^2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 vt}{h^2}\right) - \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 vx}{Uh^2}\right) \right] \right\}$$

Таким образом, определены законы изменения давления, скорости и силы трения для нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости при вышеуказанной постановке задачи.

В случае обтекания движущихся плоскостей решение поставленной задачи можно построить тем же методом. Отметим, что во всех формулах суммы со знаком "штрих" равны нулю при $0 \leq x < Ut$ и отличны от нуля при $x > Ut$ [3].

Анализ полученных результатов показывает, что:

– давление, продольная скорость и сила трения зависят от времени и координат, а поперечная скорость – только от координат;

– при стремлении t к бесконечности (соблюдая условие $x > Ut$ в суммах со знаком "штрих") из решения задачи о неустановившемся движении получается решение задачи об установившемся движении жидкости при тех же граничных условиях;

– при $U_1 > 2U$ сила трения по абсолютной величине на подвижной стенке больше, чем на неподвижной, при $U_1 < 2U$, наоборот, а в случае $U_1 = 2U$ – силы трения на обеих стенках равны;

– в начальные моменты времени силы трения на стенках стремятся к бесконечности, что свидетельствует о явлении удара плоскостей по жидкости;

– ряды, входящие в выражения v_x , p , v_y и τ – равномерно сходящиеся;

— подбором скоростей стенки, основного потока жидкости и соответствующих начальных и граничных условий можно получить различные частные случаи, исследованные другими авторами [4] — [7].

Работа выполнена в рамках научной темы №94-670, финансируемой государственными источниками Республики Армения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаджанян Г.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, №4, с. 86-89.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. - М.: Физматгиз, 1958. 47с.
3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1968. 230с.
4. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. - М.: А. Гостехтеориздат, 1961. 249с.
5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости М.: Гостехтеориздат, 1955. 319с.
6. Шлихтинг Г.А. Теория пограничного слоя. - М.: Изд иностр. лит., 1956. 74с.
7. Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т. 40, №3, с. 49-53.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
12.02.1996