

УДК 539.2

К ЗАДАЧЕ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В
НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Мухсихачоян А.Р.

Ա.Ր. Մուխսիխաչոյան

Սահերի մակերևութային ալիքի անհամասեռ միջավայրում

Ցույց է տրված, որ որոշակի տիպերի անհամասեռ միջավայրերի համար շարժման հավասարումը բերվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարման Ստուպկա է դիսպերսիոն հավասարումը և բերված են դիսպերսիոն կորերը: Ցույց է տրված, որ սահերի մակերևութային ալիքի ըն փուլային արագությունը և ըն գոյություն ունեցող էսպիտ կախված են անհամասեռության բնութագրիչներից:

A.R. Mukhsikhachoyan

On The Shear Surface Waves In a Nonhomogeneous Solid

Для конкретных типов неоднородных сред показана возможность приведения уравнения движения к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Получено дисперсионное уравнение и приведены дисперсионные кривые. Показано, что как фазовая скорость, так и условие существования СПВ существенно зависят от характеристик неоднородностей.

Изучение распространения поверхностных акустических волн в неоднородных твердых средах становится все более актуальным в связи с тем, что задав характеристики неоднородной среды, можно управлять распространением волны.

Поперечные поверхностные волны в полупространстве с небольшой поверхностной неоднородностью рассмотрены в работе [1]. В работе [2] показано, что в слабонеоднородном по глубине упругом полупространстве распространяются сдвиговые поверхностные волны (СПВ), условия существования которых существенно зависят от параметров неоднородностей. При помощи БВК метода авторами [3] получено решение задачи о распространении упругих волн в неоднородной упругой среде, рассмотрено движение в неограниченной среде, свойства которой изменяются по гармоническому закону. В работе [4] рассмотрены поверхностные волны в слое при конкретных законах неоднородности среды, а в [5] - динамические особенности распространения волн в вертикально-неоднородных средах.

В настоящей статье исследуется как возможность приведения уравнения движения к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (с помощью соответствующего выбора законов изменения жесткости и плотности неоднородной среды), так и возможность существования СПВ в данной среде.

1. Отнесем декартовую систему координат XYZ к упругому неоднородному полупространству таким образом, чтобы абсциссы совпали с направлением распространения волны, а ординаты - с направлением распространения в глубину полупространства $y > 0$. Рассматривается антиплоское напряженно-деформируемое состояние с вектором перемещения $U = \{0; 0; W(x, y, t)\}$. Характеристиками неоднородной

среды являются модуль сдвига $G(y)$ и плотность $\rho(y)$. Как известно, уравнение движения упругой изотропной неоднородной среды имеет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{G(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left[G(y) \frac{\partial W}{\partial y} \right] = \frac{1}{c^2(y)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где $C(y) = [G(y)/\rho(y)]^{1/2}$ — переменная скорость сдвиговой объемной волны. Ищем решение этого уравнения в виде

$$W = \varphi(y) \exp[i(kx - \omega t)]$$

Тогда уравнение (1.1) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$\varphi(y) + G(y)G^{-1}(y)\varphi(y) - k^2(1 - \eta)\varphi(y) = 0 \quad (1.2)$$

где $\eta(y) = V^2/C^2(y)$, $V = \omega/k$ — фазовая скорость СПВ. Если ввести функцию

$$\Psi(y) = G^{1/2}(y)\varphi(y) \quad (1.3)$$

то для $\Psi(y)$ получим

$$\Psi - v^2 \Psi = 0 \quad (1.4)$$

где

$$v = \left[k^2(1 - \eta(y)) + (G^{1/2}(y))^{-1} G^{-1/2}(y) \right]^{1/2}$$

Однако видно, что при определенных неоднородностях, (1.4) можно привести к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Для этого необходимо, чтобы имели место следующие требования:

1. $C(y) = C = \text{const}$ — скорость сдвиговой объемной волны была постоянной, т.е. жесткость и плотность среды менялись идентичным образом.

$$2. (G^{1/2}(y))^{-1} G^{-1/2}(y) = \beta = \pm \frac{1}{p^2} = \text{const} \quad (1.5)$$

второе слагаемое в выражении v также постоянно.

Интегрируя выражение (1.5), для жесткости неоднородной среды получим следующие возможные законы изменения [7]:

$$G(y) = \begin{cases} G_0 [\cosh(y/p) + A \sinh(y/p)]^2, & \beta = 1/p^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0 [1 + Ay]^2, & \beta = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0 [\cos(y/p) + A \sin(y/p)]^2, & \beta = -1/p^2 \end{cases} \quad (1.8)$$

где p, A и $G(0) = G_0 > 0$ — постоянные. По требованию 1 плотность этой среды будет меняться аналогичными (1.6)-(1.8) законами

$$\rho(y) = G(y)/C^2$$

2. С учетом требований 1 и 2 решение уравнения (1.4) запишется следующим образом [6]:

$$\Psi(y) = \Psi(0) \exp(-vy) \quad (2.1)$$

где

$$v = [k^2(1 - \eta) \pm 1/p^2]^{1/2}, \quad \eta = V^2/C^2$$

Тогда поле упругих перемещений СПВ представляется в виде

$$W(x, y, t) = W(0) [G(0)/G(y)]^{1/2} \exp(-vy) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.2)$$

Исходя из (2.1), условие затухания волны примет вид

$$0 < V/C < \left[1 \pm 1/(kp)^2\right]^{1/2} \quad (2.3)$$

Очевидно, что оно зависит от волнового числа и, следовательно затухание допустимо для СПВ с длиной

$$kp > 1, \text{ если } \beta = -1/p^2 \quad (2.4)$$

$$\infty > kp > 0, \text{ если } \beta = 1/p^2 \quad (2.5)$$

По коротковолновому приближению (2.3) приводится к условию затухания волны для однородной среды, а в случае длинноволнового приближения (что приемлемо только для (2.5)) верхний предел допустимого диапазона фазовой скорости стремится к бесконечности.

Пусть граница полупространства $y = 0$ свободна от механических нагрузок $\sigma_{32} = 0$. Тогда дисперсионное уравнение запишется в виде

$$2vG(0) + G(0) = 0 \quad (2.6)$$

где V определяется по (2.1), а $G(y)$ - по (1.6)-(1.8). Из (2.6) видно, что условием существования СПВ в рассматриваемой среде является

$$G(0) \leq 0 \quad (2.7)$$

Последнее условие равносильно тому, чтобы постоянная A в (1.6)-(1.8) стала отрицательной при $\beta = 0$ или неположительной при других значениях β . Из дисперсионного уравнения (2.6) определим фазовую скорость СПВ

$$V/C = \left[1 + H(0)/k^2\right]^{1/2} \quad (2.8)$$

где

$$H = \ln \sqrt{G}$$

Легко заметить, что найденная скорость удовлетворяет условию затухания волны. Требование, чтобы скорость была действительной величиной, приводит к ограниченности длины распространяющихся волн:

$$kp > K_1 = \left[-H(0)p^2\right]^{1/2} \quad (2.9)$$

если

$$H(0) < 0 \quad (2.10)$$

В обратном же случае, если

$$H(0) > 0 \quad (2.11)$$

длина этих волн не ограничивается. Однако, требование (2.9) более строго, чем (2.4), следовательно, длина СПВ определяется именно по (2.9). Для конкретных неоднородностей (1.6)-(1.8) соответственно получим

$$H(0) = \begin{cases} (1 - A^2)/p^2 \\ -A^2 \\ -(1 + A^2)/p^2 \end{cases}$$

Как и следовало ожидать, при (1.6) выполняется условие (2.10), если $A^2 > 1$ или (2.11), если $A^2 < 1$. Из всего вышесказанного следует, что дисперсионные кривые, изображающие зависимость $V(kp)$, имеют вид, приведенный на фиг.1. Кривая 1 соответствует случаю (2.10), а кривая 2 - случаю (2.11). Первая начинается со значения K_1 и при $kp \rightarrow \infty$ приближается к 1, оставаясь меньше ее. Вторая кривая начинается с верхнего предела допустимого диапазона фазовой скорости V_0 (которая

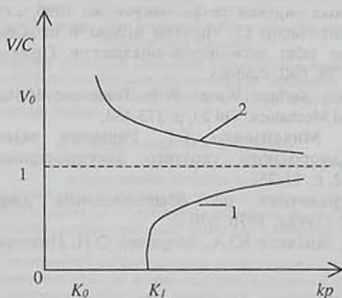
пределяется по (2.3) для определенного K_0) и при $kp \rightarrow \infty$ приближается 1, оставаясь больше нее.

3. Обсудим некоторые частные случаи. Пусть постоянная $A = 1$, тогда жесткость представится в виде

$$G(y) = \begin{cases} G_0 \exp(2y/p), & \beta > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0(1 + y/p)^2, & \beta = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0[1 + \sin(2y/p)]^2, & \beta < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$



Фиг. 1

Первая из этих функций представляет из себя экспоненциально возрастающую зависимость от координаты y . Вторая функция на области определения $G(y)$ также непрерывно возрастает. И, наконец, третья - (3.3) является периодически изменяющейся по глубине характеристикой среды. Все эти случаи характерны тем, что ни при одной из них СПВ не существует, поскольку нарушается условие существования поверхностной волны $A < 0$.

Теперь предположим $A = -1$. Тогда

$$G(y) = \begin{cases} G_0 \exp(-2y/p), & \beta > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0(1 - y)^2, & \beta = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0[1 - \sin(2y/p)]^2, & \beta < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь, в отличие от предыдущего, (3.4) характеризует по глубине убывающую жесткость. При том для всех случаев (3.4)-(3.6) СПВ существует.

В случае $A = 0$ имеем

$$G(y) = \begin{cases} G_0 \operatorname{ch}^2(y/p), & \beta > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0, & \beta = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0 \cos^2(y/p), & \beta < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Тут характерным является тот факт, что (3.8) соответствует случаю однородной среды, при которой, как известно, СПВ не существует, но для

(3.7) и (3.9) $G(0) = 0$, что вполне соответствует условию существования СПВ.

Автор благодарен доценту кафедры механики сплошной среды ЕГУ Минасяну М.М. за полезные обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. О поверхностной волне, вызванной неоднородностью в твердом теле. - В кн.: Акустическая спектроскопия, квантовая акустика, акустоэлектроника: Материалы X Всесоюз. конф. по квантовой акустике и акустоэлектронике. Ташкент: Фан, 1978, с. 101-103.
2. Белубекян М.В., Мухсичаоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих телах. - Акуст. ж., 1996, т.42, №2, с.179-182.
3. Нзйфех А., Немат-Насер С. Упругие волны в неоднородных упругих средах. - Тр. амер. общ. инженеров-механиков. Прикладная механика, серия E, 1972, т. 39, №3, с.58-65.
4. Maugin G.A. Elastic Surface Waves With Transverse Horizontal Polarization// Advances In Applied Mechanics. Vol 23, p. 373-434.
5. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. Решение задачи Лэмба для вертикально-неоднородного упругого полупространства. - Физика Земли, 1976, №12, с. 11-25.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1976. 576 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. -М.: Наука, 1981. 797 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
9.07.1997