ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №1, 1999 Механика

УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АМПЛИТУДЫ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОГО, ВЕСОМОГО ЖЕСТКОГО ФУНДАМЕНТА, ЛЕЖАЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СЦЕПЛЕНИЕМ

Абрамян Б.Л., Гаспарян А.В., Саакян А.В.

Բ.Լ. Աբրահամյան, Ա.Վ.Գասպարյան, Ա.Վ. Սահակյան
Անհամասեռ առաձգական կիսատարածության վրա ամրակցումով զետեղված կլոր, կշռելի, կոշտ ֆունդամենտի ուղղահայաց տատանումների ամպլիտուդի որոշման վերաբերյալ

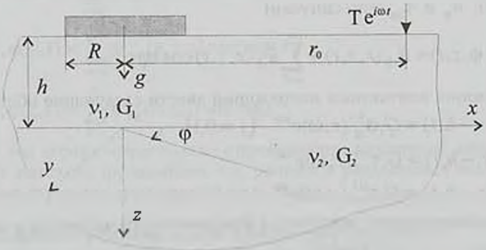
Դիտարկվում է կլոր հիմքով, կշռելի, կոշտ ֆունդամենտի, որը տեղադրված է անհամասեռ, երկշերտ կիսատարածության մակերևույթի վրա ամրակցումով, ոչ առանցքասիմետրիկ տատանումների վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը, երբ տատանումները առաջացնող հարմոնիկ դինամիկ ուժը կիրառված է կիսատարածության մակերևույթին ֆունդամենտից վերջավոր հեռավորության վրա

B.L. Abrahamyan, A.V. Gasparyan, A.V. Sahakyan
On determination of amplitude of vertical vibration of circular, heavy, rigid footing, lying on the surface of non homogeneous elastic semi-space with cohesion.

Рассматривается контактная задача о неосесимметричных колебаниях весомого жесткого фундамента с круглым основанием, который расположен со сцеплением на поверхности неоднородного двухслойного полупространства, когда возбуждающая колебания гармоническая динамическая сила приложена на поверхности полупространства на конечном расстоянии от фундамента.

1. Постановка задачи.

Рассматривается неосесимметричная контактная задача о колебаниях круглого в плане, весомого, жесткого фундамента, установленного на упругом, двухслойном по вертикали, полупространстве со сцеплением и колеблющегося под действием гармонической динамической силы, приложенной на поверхности полупространства на конечном расстоянии от фундамента (фиг. 1).



Фиг. 1

Граничные условия и условия контакта слоев полупространства задаются в виде

$$u_z^{(1)}\Big|_{z=-h} - \varepsilon_h = \left(\varepsilon_\omega^{(h)} + \kappa_\omega^{(h)} r\cos\varphi\right)e^{i\omega t}$$

$$u_r^{(1)}\Big|_{z=-h} = \gamma_\omega^{(h)}\cos\varphi e^{i\omega t} \qquad (r < R)$$

$$u_\varphi^{(1)}\Big|_{z=-h} = -\gamma_\omega^{(h)}\sin\varphi e^{i\omega t} \tag{1.1}$$

$$\sigma_z^{(1)}\Big|_{z=-h} = -\frac{Te^{i\omega t}\delta(r-r_0)\delta(\varphi)}{r} \qquad (r,\ r_0 > R) \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}\Big|_{z=-h} = \tau_{z\varphi}^{(1)}\Big|_{z=-h} = 0$$

$$u_r^{(1)}\Big|_{z=0} = u_r^{(2)}\Big|_{z=0},\ u_\varphi^{(1)}\Big|_{z=0} = u_\varphi^{(2)}\Big|_{z=0},\ u_z^{(1)}\Big|_{z=0} = u_z^{(2)}\Big|_{z=0}$$

$$\sigma_z^{(1)}\Big|_{z=0} = \sigma_z^{(2)}\Big|_{z=0},\ \tau_{rz}^{(1)}\Big|_{z=0} = \tau_{rz}^{(2)}\Big|_{z=0},\ \tau_{z\varphi}^{(1)}\Big|_{z=0} = \tau_{z\varphi}^{(2)}\Big|_{z=0} \tag{1.3}$$

где величины, относящиеся к верхнему слою упругого полупространства, отмечены индексом "1", а величины нижнего слоя — индексом "2"

В условиях (1.1) — (1.3) использованы следующие обозначения: ε_h — осадка весомого круглого жесткого фундамента, установленного на поверхности неоднородного двухслойного полупространства со сцеплением под действием только собственного веса, эту осадку считаем известной [10]; $\varepsilon_\omega^{(h)}$, $\gamma_\omega^{(h)}$ и $\kappa_\omega^{(h)}$ — амплитуды вертикальных, горизонтальных и угловых колебаний фундамента соответственно; $\delta(s)$ — функция Дирака.

Амплитуды колебаний $\varepsilon_\omega^{(h)}$, $\gamma_\omega^{(h)}$ и $\kappa_\omega^{(h)}$ неизвестны и должны быть определены из условий динамического равновесия фундамента.

Если перемещения и напряжения представить в виде рядов Фурье по координате $\varphi\ (0 < \varphi < \pi)$ в следующем виде (u_r, u_z, σ_z и τ_{rz} по косинусам, u_φ и $\tau_{z\varphi}$ — по синусам)

$$u_r(r,\varphi,z,t) = \bar{u}_{r0}(r,z,t) + \sum_{k=1}^{\infty}\bar{u}_{rk}(r,z,t)\cos k\varphi \tag{1.4}$$

и для гармоник контактных напряжений ввести следующие обозначения:

$$\bar{\sigma}_{zj}^{(1)}(r,-h,t) = G_1\sigma_{zj}^{(1)}(r,\omega)e^{i\omega t} \quad (j = 0,1)$$

$$\bar{\tau}_{rz1}^{(1)}(r,-h,t) = G_1\tau_{rz1}^{(1)}(r,\omega)e^{i\omega t}$$

$$\bar{\tau}_{z\varphi1}^{(1)}(r,-h,t) = G_1\tau_{z\varphi1}^{(1)}(r,\omega)e^{i\omega t} \tag{1.5}$$

условия динамического равновесия фундамента представятся в виде

$$\int_0^R r\sigma_{z0}^{(1)}(r,\omega)dr = -\frac{P\omega^2\varepsilon_\omega^{(h)}}{2\pi G_1 g}$$

$$\int_0^R r\left[\tau_{rz1}^{(1)}(r,\omega) - \tau_{z\varphi1}^{(1)}(r,\omega)\right]dr = -\frac{P\omega^2\gamma_\omega^{(h)}}{\pi G_1 g}$$

$$\int_0^R r^2\sigma_{z1}^{(1)}(r,\omega)dr = -\frac{16PR^2\omega^2\kappa_\omega^{(h)}}{9\pi^3 G_1 g} \tag{1.6}$$

где P — собственный вес фундамента.

Для решения общей задачи с условиями (1.1)−(1.3) и (1.6) используются скалярная и векторная потенциальные волновые функции Гельмгольца $\Phi(r,\varphi,z,t)$ и $\bar{\Psi}(r,\varphi,z,t)$ $(\Psi_r,\Psi_\varphi,\Psi_z)$ [1].

При помощи этих функций вектор перемещения $\vec{u}(r,\varphi,z,t)$ определяется соотношением

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\Phi + \mathrm{rot}\bar{\Psi} \tag{1.7}$$

где функции Φ, Ψ_r, Ψ_φ и Ψ_z удовлетворяют уравнениям

$$\left(\nabla^2 - a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = \left(\nabla^2 - b^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi_z = 0$$

$$\nabla^2\Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial\varphi} - b^2\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2\Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_r}{\partial\varphi} - b^2\frac{\partial^2\Psi_\varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\ a^2 = \frac{1}{c_1^2},\ b^2 = \frac{1}{c_2^2} \tag{1.8}$$

c_1 и c_2 — скорости распространения упругих продольных и поперечных волн соответственно.

При этом три компонента векторного потенциала $\bar{\Psi}$ связаны друг с другом соотношением

$$\mathrm{div}\bar{\Psi} = 0 \tag{1.9}$$

Для решения задачи с условиями (1.1)- (1.3) и (1.6) потенциальные функции также представляются в виде рядов Фурье

$$\Phi(r,\varphi,z,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(r,z,t)\cos(m\varphi)$$

$$\Psi_r(r,\varphi,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{rm}(r,z,t)\sin(m\varphi)$$

$$\Psi_\varphi(r,\varphi,z,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\psi_{\varphi m}(r,z,t)\cos(m\varphi)$$

$$\Psi_z(r,\varphi,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{zm}(r,z,t)\sin(m\varphi) \tag{1.10}$$

Здесь мы ограничимся только определением амплитуды вертикальных колебаний жесткого фундамента, т.е. решается разделенная задача только для нулевых гармоник разложений вида (1.4).

2. Построение решения задачи для нулевой гармоники

Отметим, что задача о вертикальных колебаниях круглого штампа, лежащего на упругом двухслойном основании без трения при наличии осевой симметрии, рассматривалась в [2]. Авторы этой работы детально исследовали вопрос разрешимости интегрального уравнения задачи и привели формулы амплитудной функции контактных напряжений и перемещений поверхности верхнего слоя вне штампа.

В данной работе, учитывая разложения вида (1.4) в граничны условиях (1.1)–(1.3) для нулевых гармоник будем иметь следующи условия:

$$\bar{u}_{z0}^{(1)}\Big|_{z=-h} - \varepsilon_h = \varepsilon_\omega^{(h)} e^{i\omega t},\quad \bar{u}_{r0}^{(1)}\Big|_{z=-h} = 0 \qquad (r \le R)$$

$$\bar{\sigma}_{z0}^{(1)}\Big|_{z=-h} = -\frac{Te^{i\omega t}\delta(r-r_0)}{2\pi r},\quad \bar{\tau}_{rz0}^{(1)}\Big|_{z=-h} = 0 \quad (r, r_0 > R) \qquad (2.$$

$$\bar{\sigma}_{z0}^{(1)}\Big|_{z=0} = \bar{\sigma}_{z0}^{(2)}\Big|_{z=0},\quad \bar{\tau}_{rz0}^{(1)}\Big|_{z=0} = \bar{\tau}_{rz0}^{(2)}\Big|_{z=0}$$
$$\bar{u}_{z0}^{(1)}\Big|_{z=0} = \bar{u}_{z0}^{(2)}\Big|_{z=0},\quad \bar{u}_{r0}^{(1)}\Big|_{z=0} = \bar{u}_{r0}^{(2)}\Big|_{z=0} \qquad (0 \le r < \infty) \qquad (2.$$

Для определения неизвестной величины $\varepsilon_\omega^{(h)}$ должно быть использо вано первое условие динамического равновесия фундамента из (1.6).

Для решения задачи с условиями (2.1)–(2.2) и (1.6) пользуемс волновыми функциями $\varphi_0^{(j)}$, $\psi_{\varphi 0}^{(j)}$ $(j=1,2)$ соответственно для верхнего нижнего слоев полупространства и формулами

$$\bar{u}_r^{(j)}(r,z,t) = \frac{\partial \varphi_0^{(j)}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial z},\quad \bar{u}_z^{(j)}(r,z,t) = \frac{\partial \varphi_0^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial r} + \frac{\psi_{\varphi 0}^{(j)}}{r}$$

$$\bar{\sigma}_{z0}^{(j)}(r,z,t) = 2G_j\left[\frac{\nu_j}{1-2\nu_j}a_j^2\frac{\partial^2\varphi_0^{(j)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi_0^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial r} + \frac{\psi_{\varphi 0}^{(j)}}{r}\right)\right]$$

$$\bar{\tau}_{rz0}^{(j)}(r,z,t) = G_j\left[2\frac{\partial^2\varphi_0^{(j)}}{\partial r\partial z} + b_j^2\frac{\partial^2\psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2\psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial z^2}\right] \qquad (2.$$

Соответствующим образом решение уравнений

$$\left(\nabla_0^2 - a_j^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_0^{(j)} = \left(\nabla_1^2 - b_j^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_{\varphi 0}^{(j)} = 0,\quad \nabla_n^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{r^2} \qquad (2.$$

для упругих слоев полупространства берутся в виде

$$\varphi_0^{(j)} = \bar{\varphi}_0^{(j)}(r,z)e^{i\omega t},\quad \psi_{\varphi 0}^{(j)} = \bar{\psi}_{\varphi 0}^{(j)}(r,z)e^{i\omega t} \quad (j=1,2) \qquad (2.$$

где

$$\bar{\varphi}_0^{(j)} = \int_0^\infty \beta J_0(\beta r)\bar{\bar{\varphi}}_0^{(j)}(\beta,z)d\beta,\quad \bar{\psi}_{\varphi 0}^{(j)} = \int_0^\infty \beta J_1(\beta r)\bar{\bar{\psi}}_{\varphi 0}^{(j)}(\beta,z)d\beta \qquad (2.$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar{\varphi}}_0^{(j)} &= A_0^{(1)}(\beta,\omega)\mathrm{sh}(\mu_{a_1}z) + C_0^{(1)}(\beta,\omega)\mathrm{ch}(\mu_{a_1}z)\\ \bar{\bar{\psi}}_{\varphi 0}^{(j)} &= A_{\varphi 0}^{(1)}(\beta,\omega)\mathrm{sh}(\mu_{b_1}z) + C_{\varphi 0}^{(1)}(\beta,\omega)\mathrm{ch}(\mu_{b_1}z)\end{aligned}\right\} (-h \le z \le 0)$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_0^{(2)} = B_0^{(2)}(\beta,\omega)e^{-\mu_{a_2}z},\quad \bar{\bar{\psi}}_{\varphi 0}^{(2)} = B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)e^{-\mu_{b_2}z} \quad (z \ge 0) \qquad (2.$$

В соотношениях (2.7) введены обозначения

$$\mu_s = \sqrt{\beta^2 - s^2\omega^2} \qquad (s = a_j, b_j) \quad (j=1,2)$$

где функции μ_s в соответствии с величиной ω выбираются так, чтоб выполнялись условия однозначности и ограниченности решений указанных интервалах с соблюдением условий типа "условий излучени на бесконечности" [2, 3, 11].

Определив по формулам (2.3) выражения нулевых гармоник для перемещений и напряжений, учитывая в них представления (2.6) и (2.7), далее удовлетворив граничным условиям (2.1) и (2.2), для неизвестных коэффициентов получим значения

$$A_0^{(1)} = \frac{1}{\mu_{a_1} b_1^2 \omega^2} \left\{ B_0^{(2)}(\beta,\omega)\mu_{a_1}\left(2\beta^2 - b_1^2\omega^2 - 2m_0\beta^2\right) - \right.$$
$$\left. - B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)\beta\left[2\beta^2 - b_1^2\omega^2 - m_0\left(2\beta^2 - b_2^2\omega^2\right)\right]\right\}$$

$$C_0^{(1)} = \frac{1}{b_1^2\omega^2}\left\{B_0^{(2)}(\beta,\omega)\left[2\beta^2 - m_0\left(2\beta^2 - b_2^2\omega^2\right)\right] - B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)(1-m_0)2\beta\mu_{b_2}\right\}$$

$$A_{\varphi 0}^{(1)} = \frac{1}{\mu_{b_1} b_1^2 \omega^2} \left\{ B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)\mu_{b_2}\left(2\beta^2 - b_1^2\omega^2 - 2m_0\beta^2\right) - \right.$$
$$\left. - B_0^{(2)}(\beta,\omega)\beta\left[2\beta^2 - b_1^2\omega^2 - m_0\left(2\beta^2 - b_2^2\omega^2\right)\right]\right\}$$

$$C_{\varphi 0}^{(1)} = \frac{1}{b_1^2\omega^2}\left\{B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)\left[2\beta^2 - m_0\left(2\beta^2 - b_2^2\omega^2\right)\right] - B_0^{(2)}(\beta,\omega)(1-m_0)2\beta\mu_{a_2}\right\} \qquad (2.8)$$

где $m_0 = \dfrac{G_2}{G_1}$, а для определения коэффициентов $B_0^{(2)}$ и $B_{\varphi 0}^{(2)}$ получается система парных интегральных уравнений вида

$$\int_0^\infty \beta J_0(\beta r)\tilde{u}_{z0}^{(1)}(\beta,-h)d\beta = \varepsilon_\omega^{(h)} \quad (r \le R)$$

$$\int_0^\infty \beta J_1(\beta r)\tilde{u}_{r0}^{(1)}(\beta,-h)d\beta = 0 \quad (r \le R)$$

$$\int_0^\infty \beta J_0(\beta r)\tilde{\sigma}_{z0}^{(1)}(\beta,-h)d\beta = -\frac{T\delta(r-r_0)}{2\pi r G_1} \quad (r, r_0 > R)$$

$$\int_0^\infty \beta J_1(\beta r)\tilde{\tau}_{rz0}^{(1)}(\beta,-h)d\beta = 0 \quad (r > R) \qquad (2.9)$$

где введены обозначения

$$\tilde{u}_{z0}^{(1)}(\beta,-h) = B_0^{(2)}(\beta,\omega)s_1(\beta,h) + B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)n_1(\beta,h)$$
$$\tilde{u}_{r0}^{(1)}(\beta,-h) = B_0^{(2)}(\beta,\omega)s_2(\beta,h) + B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)n_2(\beta,h)$$
$$\tilde{\sigma}_{z0}^{(1)}(\beta,-h) = B_0^{(2)}(\beta,\omega)s_3(\beta,h) + B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)n_3(\beta,h)$$
$$\tilde{\tau}_{rz0}^{(1)}(\beta,-h) = B_0^{(2)}(\beta,\omega)s_4(\beta,h) + B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)n_4(\beta,h) \qquad (2.10)$$

Коэффициенты s_j и n_j включают в себе геометрические и физические параметры упругих слоев полупространства, а также частотный и другие параметры распространения упругих волн в этих слоях.

Введя новые обозначения

$$\int_0^\infty \beta J_0(\beta r)\tilde{\sigma}_{z0}^{(1)}(\beta,-h)d\beta = \begin{cases} -\dfrac{T\delta(r-r_0)}{2\pi r G_1} & (r, r_0 \ge R) \\ \sigma_{z0}^{(1)}(r,\omega) & (r < R) \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \beta J_1(\beta r)\tilde{\tau}_{rz0}^{(1)}(\beta,-h)d\beta = \begin{cases} 0 & (r > R) \\ \tilde{\tau}_{rz0}^{(1)}(r,\omega) & (r < R) \end{cases} \qquad (2.11)$$

где $\sigma_{z0}^{(1)}(r,\omega)$ и $\tau_{rz0}^{(1)}(r,\omega)$ являются безразмерными нулевыми гармониками контактных напряжений под фундаментом, будем иметь

$$\tilde{\sigma}_{z0}^{(1)}(\beta,-h)=\int_0^R rJ_0(\beta r)\sigma_{z0}^{(1)}(r,\omega)dr-\frac{TJ_0(\beta r_0)}{2\pi G_1}$$

и

$$\tilde{\tau}_{rz0}^{(1)}(\beta,-h)=\int_0^R rJ_1(\beta r)\tau_{rz0}^{(1)}(r,\omega)dr \tag{2.12}$$

Сопоставляя соотношения (2.10) и (2.12), для искомых неизвестных коэффициентов получим значения

$$B_0^{(2)}(\beta,\omega)=\frac{1}{\Omega(\beta,h)}\left\{n_4(\beta,h)\left[\int_0^R rJ_0(\beta,r)\sigma_{z0}^{(1)}(r,\omega)dr-\frac{TJ_0(\beta r_0)}{2\pi G_1}\right]-\right.$$

$$\left.-n_3(\beta,h)\int_0^R rJ_1(\beta,r)\tau_{rz0}^{(1)}(r,\omega)dr\right\}$$

$$B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta,\omega)=\frac{1}{\Omega(\beta,h)}\left\{s_1(\beta,h)\int_0^R rJ_1(\beta,r)\tau_{rz0}^{(1)}(r,\omega)dr-\right.$$

$$\left.-s_4(\beta,h)\left[\int_0^R rJ_0(\beta,r)\sigma_{z0}^{(1)}(r,\omega)dr-\frac{TJ_0(\beta r_0)}{2\pi G_1}\right]\right\}$$

$$\Omega(\beta,h)=n_4(\beta,h)s_1(\beta,h)-s_4(\beta,h)n_3(\beta,h) \tag{2.13}$$

Равенство $\Omega(\beta,h)=0$ представляет собой уравнение типа Рэлея. В частном случае, если $\nu_1=\nu_2$, $G_1=G_2$, $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b$ и $h=0$, будем иметь $\Omega(\beta,0)=4\beta^2\mu_a\mu_b-\left(2\beta^2-\beta^2\omega^2\right)^2$

Подставляя значения (2.13) в первые два уравнения (2.9) (остальные уравнения удовлетворяются тождественно) приведем их к виду

$$\int_0^R t\sigma_{z0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty \beta J_0(\beta r)J_0(\beta t)L_{11}(\beta,h)d\beta+$$

$$+\int_0^R t\tau_{rz0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty \beta J_0(\beta r)J_1(\beta t)L_{12}(\beta,h)d\beta=$$

$$=\varepsilon_\omega^{(h)}+\frac{T}{2\pi G_1}\int_0^\infty \beta J_0(\beta r)J_0(\beta r_0)L_{11}(\beta,h)d\beta \quad (0<r<R)$$

$$\int_0^R t\sigma_{z0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty \beta J_1(\beta r)J_0(\beta t)L_{21}(\beta,h)d\beta+$$

$$+\int_0^R t\tau_{rz0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty \beta J_1(\beta r)J_1(\beta t)L_{22}(\beta,h)d\beta=$$

$$=\frac{T}{2\pi G_1}\int_0^\infty \beta J_1(\beta r)J_0(\beta r_0)L_{21}(\beta,h)d\beta \quad (0<r<R) \tag{2.14}$$

Здесь коэффициенты $L_{ij}(\beta,h)$ содержат геометрические и физические параметры слоев полупространства, а также частотный параметр и параметры распространения упругих волн в упругой среде.

Далее, используя представления интегралов

$$\int_0^\infty J_0(\beta r)J_0(\beta t)d\beta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\min(r,t)} \frac{dx}{\sqrt{(r^2-x^2)(t^2-x^2)}}$$

$$\int_0^\infty J_1(\beta r)J_1(\beta t)d\beta = \frac{2}{\pi r t}\int_0^{\min(r,t)} \frac{x^2dx}{\sqrt{(r^2-x^2)(t^2-x^2)}}$$

система интегральных уравнений (2.14) приводится к следующей системе интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned} t\sigma_{z0}^{(1)}(t,\omega) &= -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^R \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-t^2)}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{r\Phi_1(r)dr}{\sqrt{(x^2-r^2)}} \\ \tau_{rz0}^{(1)}(t,\omega) &= -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^R \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-t^2)}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{r^2\Phi_2(r)dr}{\sqrt{(x^2-r^2)}} \end{aligned} \qquad (0 < t < R) \qquad (2.15)$$

где использованы обозначения

$$\Phi_1(r) = \int_0^R t\sigma_{z0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty [1-\beta L_{11}(\beta,h)]J_0(\beta r)J_0(\beta t)d\beta -$$

$$-\int_0^R t\tau_{rz0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty \beta L_{12}(\beta,h)J_0(\beta r)J_1(\beta t)d\beta +$$

$$+\varepsilon_\omega^{(h)} + \frac{T}{2\pi G_1}\int_0^\infty \beta L_{11}(\beta,h)J_0(\beta r)J_0(\beta r_0)d\beta$$

$$\Phi_2(r) = -\int_0^R t\sigma_{z0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty \beta L_{21}(\beta,h)J_1(\beta r)J_0(\beta t)d\beta +$$

$$+\int_0^R t\tau_{rz0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty [1-\beta L_{22}(\beta,h)]J_1(\beta r)J_1(\beta t)d\beta +$$

$$+\frac{T}{2\pi G_1}\int_0^\infty \beta L_{21}(\beta,h)J_1(\beta r)J_0(\beta r_0)d\beta \qquad (2.16)$$

В системе интегральных уравнений (2.15), в качестве свободного члена, содержится амплитуда вертикальных колебаний $\varepsilon_\omega^{(h)}$, которая подлежит определению.

Подставляя правую часть первого уравнения из (2.15) в первое условие из (1.6) и производя интегрирования, для определения амплитуды $\varepsilon_\omega^{(h)}$ получим значение

$$\varepsilon_\omega^{(h)} = \frac{4G_1 g}{4G_1 gR + P\omega^2}\left\{-\frac{T}{2\pi G_1}\int_0^\infty L_{11}(\beta,h)J_0(\beta r_0)\sin(\beta R)d\beta -\right.$$

$$-\int_0^R t\sigma_{z0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty [1-\beta L_{11}(\beta,h)]J_0(\beta t)\sin(\beta R)\frac{d\beta}{\beta} +$$

$$\left.+\int_0^R t\tau_{rz0}^{(1)}(t,\omega)dt\int_0^\infty L_{12}(\beta,h)J_1(\beta t)\sin(\beta R)d\beta\right\} \qquad (2.17)$$

Учитывая это значение в первом уравнении из (2.15) и представляя систему уравнений (2.15) в развернутом виде, приведем ее к виду

$$\sigma_{z0}^{(1)}(t,\omega) = F_\sigma(t,\omega) + \int_0^R \sigma_{z0}^{(1)}(z,\omega) K_{11}(t,z,\omega)dz + \int_0^R \tau_{rz0}^{(1)}(z,\omega) K_{12}(t,z,\omega)dz$$

$$\tau_{rz0}^{(1)}(t,\omega) = F_\tau(t,\omega) + \int_0^R \sigma_{z0}^{(1)}(z,\omega) K_{21}(t,z,\omega)dz + \int_0^R \tau_{rz0}^{(1)}(z,\omega) K_{22}(t,z,\omega)dz$$

$$(0 < t < R) \qquad (2.18)$$

Здесь ядра системы интегральных уравнений (2.18) выражаются при помощи коэффициентов s_j и n_j или L_{ij} и содержат геометрические и физические параметры слоев упругого полупространства. При этом свободные члены системы (2.18) имеют вид

$$F_\sigma(t,\omega) = \frac{T}{\pi^2 G_1}\int_0^\infty L_{11}(\beta,h)\beta J_0(\beta r_0)d\beta\left[\frac{\pi\beta J_0(\beta t)}{2} - \beta\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda+\beta)R}{\lambda+\beta}J_0(\lambda t)d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{R^2-t^2}}\left(\cos(\beta R) - \frac{4G_1 g\sin(\beta R)}{\beta(4G_1 gR + P\omega^2)}\right)\right]$$

$$F_\tau(t,\omega) = -\frac{T}{\pi^2 G_1}\int_0^\infty L_{21}(\beta,h)\beta J_0(\beta r_0)d\beta\left[\beta\sqrt{R^2-t^2}\cos(\beta R) - \right.$$

$$\left. - \frac{R\sin(\beta R)}{\sqrt{R^2-t^2}} + \beta^2\int_t^R \sqrt{x^2-t^2}\sin(\beta x)dx\right] \qquad (2.19)$$

При получении этого выражения использовано представление [4]

$$\int_t^R \frac{\sin(\beta x)dx}{\sqrt{x^2-t^2}} = \frac{\pi J_0(\beta t)}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda+\beta)R}{\lambda+\beta}J_0(\lambda t)d\lambda \quad (\beta \geq 0) \qquad (2.20)$$

Амплитуда вертикальных колебаний весомого фундамента, вызванных действием сосредоточенной гармонической силы $Te^{i\omega t}$, приложенной на конечном расстоянии от фундамента на поверхности слоистого полупространства, определяется по формуле (2.17) после решения ситемы (2.18).

Система интегральных уравнений вида (2.18), для определения амплитудных значений нулевых гармоник контактных напряжений под фундаметом может быть решена методом последовательных приближений, если выполняется условие

$$\max_{j=1,2}\left\{\int_0^R \left|K_{j1}(t,z,\omega)\right|dt + \int_0^R \left|K_{j2}(t,z,\omega)\right|dt\right\} < 1 \qquad (2.21)$$

Вопрос разрешимости интегральных уравнений динамических контактных задач математической теории упругости исследовался многими исследователями. Решению таких уравнений посвящены работы В.А. Бабешко [5–7]. Этой проблеме посвящены также монография И.И. Воровича и В.А. Бабешко [8] и работы [11, 12].

Из формулы (2.17), в частном случае, при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $G_1 = G_2 = G$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $\omega = 0$ и $h = 0$, получим значение

$$\varepsilon_0^{(0)} = \frac{T(1-\nu)}{2\pi GR}\arcsin\frac{R}{r_0} + \frac{1-2\nu}{2R}\int_0^R \tau_{rz0}^{(1)}(t,0)\left(R - \sqrt{R^2-t^2}\right)dt \qquad (2.22)$$

Результат (2.22), который впервые получен в работе [9], может быть использован для определения изменения осадки весомого фундамента от действия дополнительной сосредоточенной силы T.

Аналогичным образом определяются также амплитуды горизонтальных и угловых колебаний жесткого весомого фундамента, лежащего на двухслойном упругом полупространстве со сцеплением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J.D. Wave propogation in Elastic Solids.–North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1973, 425p.
2. Бабешко В.А., Ворович И.И., Селезнев М.Г. Вибрация штампа на двухслойном основании. – ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 166-172.
3. Нобль Б. Применение метода Винера-Хопфа. – М.: Изд. ИЛ, 1962, 279с.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть 1. М.: Изд. ИЛ, 1949, 798с.
5. Бабешко В.А. Об интегральных уравнениях некоторых динамических контактных задач теории упругости и математической физики. – ПММ, 1969, т. 33, вып. 1, с. 52-60.
6. Бабешко В.А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. – ДАН СССР, 1973, т. 210, №6, с. 1310-1313.
7. Бабешко В.А. О системах интегральных уравнений динамических контактных задач. – ДАН СССР, 1975, т. 220, №6, с. 1293-1296.
8. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические контактные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979, 320с.
9. Абрамян Б.Л., Саакян А.В., Гаспарян А.В. О действии на весомый фундамент нормальной сосредоточенной силы, приложенной на конечном расстоянии от фундамента. – Докл. НАН Армении, 1996, т. 96, №1, с. 16-20.
10. Абрамян Б.Л., Саакян А.В., Гаспарян А.В. Осесимметричная контактная задача для жесткого круглого фундамента, лежащего на двухслойном упругом полупространстве со сцеплением. – Докл. НАН Армении, 1997, т. 97, №3, с. 26-31.
11. Развитие теории контактных задач в СССР. Под редакцией Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976, 493с.
12. Бородачев Н.М. Динамическая контактная задача для штампа с плоским круглым основанием, лежащим на упругом полупространстве. – Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, №2, с. 82-90.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
22.05.1997