

УДК 551.31

ДОЖДЕВАЯ ЭРОЗИЯ ПОЧВ НА СКЛОНАХ  
ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ

Տագոմոյան Ա.Կ.

Ա.Յա. Սաղոմոնյան  
Բարձունքների լանջերին բնահողի անձրևային էրոզիան

Աշխատանքում դիտարկվում է բարձունքների լանջերին անձրևաջրի հոսքի կողմից բնահողի մասնիկների տեղափոխումը: Առաջարկվում է բնահողի վրայով մածուցիկ հեղուկի շերտի շարժման մի մոդել որը կիրառելի է բնահողից մասնիկների տեղափոխման եաշվաճման համար: Նշված մոդելը դիֆուզիայի հավասարումների հետ համատեղ հնարավոր է դարձնում որոշել տեղափոխված բնահողի քանակածը:

S.Ja.Sagomonyan  
The rain erosion of soils on the slopes of the hills

Исследуется задача уноса частиц почвы на склонах возвышенности потоком дождевой воды. Предлагается модель движения слоя вязкой жидкости над почвой, пригодная для учета переноса частиц из почвы.

Указанная модель с присоединением уравнения диффузии позволяет определить массу уноса почвы в зависимости от водонасыщения и физических характеристик почвы.

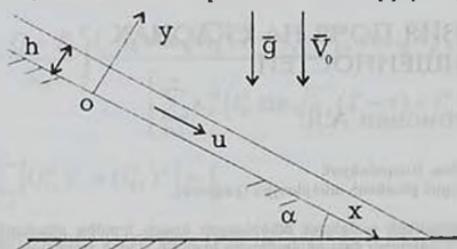
1. Часть непроникшей в почву жидкости капель дождя, достигших поверхности склона, образует на ней сплошной слой жидкости, стекающей вниз к подножию под действием силы тяжести. Водонасыщенная почва под слоем жидкости находится в состоянии вязкопластической среды. Предполагается, что напряжение сдвига в этой среде меньше предела текучести, и она находится в состоянии покоя [1, 2, 3].

Можно предположить, что образование вязкопластической среды является следствием следующих процессов. Под ударным воздействием капель дождя происходит дробление частиц почвы на более мелкие частицы, уплотнение их, что приводит к уменьшению пористости-объемной концентрации пор. Жидкость капель дождя заполняет измененные поры, а весь процесс приводит к значительному уменьшению сил сцепления между частицами. В модельной вязкопластической среде, в системе единиц килограмм-сила, метр, секунда, предел текучести имеет порядок единицы [1]. Благодаря сложному процессу взаимодействия между слоем жидкости и водонасыщенной почвой на поверхности склона: диффузии, обтекания частиц, других возможных причин, отдельные частицы почвы попадают в поток жидкости в слое. Так образуется суспензия - слой жидкости с частицами почвы, стекающей вниз к подножию. Объемная концентрация твердых частиц в слое жидкости мала: порядка  $10^{-4} - 10^{-6}$ . Чаше такая суспензия моделируется вязкой жидкостью, коэффициент вязкости  $\eta$ , которой определяется по формуле Эйнштейна [3]

$$\eta = \mu(1 + \gamma z), \quad z \ll 1$$

где  $\mu$  - коэффициент вязкости воды,  $z$  - объемная концентрация частиц в суспензии,  $\gamma$  - постоянный множитель, для сферических твердых частиц  $\gamma = 2,5$ . Унос жидкостью массы частиц почвы с поверхности склона

называется водной эрозией почвы. Естественно в рассматриваемом случае эрозию называть дождевой. В списке литературы работ [4, 6] указаны исследования многих авторов по водной эрозии. В настоящей работе влияние границ поверхности склона не рассматривается, она считается неограниченной плоскостью, наклонной к горизонту (поверхности Земли) под углом  $\alpha$  (фиг. 1). Скорость каплей дождя  $\bar{v}$ , имеющая величину 5-9 м/с, постоянна и параллельна вектору ускорения  $\bar{g}$  силы тяжести.



Фиг. 1

Объемная концентрация  $\omega$  жидкости каплей постоянна и равномерно распределена в дождевом пространстве; обычно  $\omega$  имеет порядок  $10^{-5} - 10^{-6}$ . Пористость почвы  $m$  на поверхности склона тоже постоянна и равномерно распределена. Предполагается, что единственной причиной образования суспензии является

диффузия частиц почвы в потоке дождевой воды в слое над ней. При этом, изменением поверхности склона пренебрегается. Уравнение переноса массы частиц почвы в потоке водной суспензии запишем в виде [6, 7]

$$\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \rho_0 \bar{v} \text{grad} c = -\text{div}(\rho_0 \bar{c} \bar{v}^*) \quad (1)$$

где  $\bar{v}$ ,  $\rho_0$  - скорость и плотность суспензии в целом, символом  $c$  обозначена массовая концентрация частиц почвы в смеси: отношение массы частиц почвы в единице объема к плотности смеси  $\rho_0$ . Символ  $\bar{v}^*$  обозначает скорость диффузии - разность между скоростью частиц почвы и скоростью смеси. Пользуясь законом Фика [6]

$$\bar{v}^* = -\frac{D}{c} \text{grad} c \quad (2)$$

где  $D$  - коэффициент диффузии частиц почвы, из (1) получим

$$\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \rho_0 \bar{v} \text{grad} c = \text{div}(\rho_0 D \text{grad} c)$$

При постоянных  $\rho_0$  и  $D$  последнее соотношение принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{v} \text{grad} c = D \nabla^2 c \quad (3)$$

При малых значениях массовой концентрации частиц почвы в водной суспензии (порядка  $10^{-4} - 10^{-3}$ ) параметры суспензии пренебрежимо мало отличаются от параметров потока чистой воды в слое. В настоящем исследовании этим отличием пренебрегается и поток суспензии заменяется потоком несжимаемой жидкости с коэффициентом вязкости воды  $\mu$ .

2. Из приведенных выше условий следует, что границей между слоем жидкости над поверхностью склона и пространством дождя будет плоскость, параллельная поверхности склона. Рассматривается плоскопараллельное, ламинарное движение. Начало координат  $x$ ,  $y$  возьмем на поверхности склона, ось  $x$  направим по этой поверхности вниз к подножию, ось  $y$  - по внешней нормали к ней (фиг. 1). Из постановки задачи следует, что параметры потока в слое не зависят от  $x$ , а толщина слоя суспензии  $h$  будет функцией времени  $t$ . Граничная

плоскость  $y = h(t)$  будет поверхностью разрыва концентрации  $\omega$ , скорости, давления. Пусть  $u_x, v_x$  - компоненты скорости жидкости по осям  $x$  и  $y$ , непосредственно за поверхностью разрыва,  $P_1, P_0$  - давления за и перед этой поверхностью,  $\tau_x$  - напряжения сдвига за ней. Законы сохранения массы, изменения количества движения на этой границе запишутся так:

$$\begin{aligned} y = h(t), \quad \omega(\dot{h} + V \cos \alpha) &= \dot{h} + v_x \\ \rho \omega(\dot{h} + V \cos \alpha)(V \cos \alpha - v_x) &= P_1 - P_0 \\ \rho \omega(\dot{h} + V \cos \alpha)(V \sin \alpha - u_x) &= \tau_x, \quad \dot{h} = \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  - плотность воды постоянна. На практике всегда выполняется условие  $h/L \ll 1$ , где  $L$  - характерная длина поверхности склона вдоль оси  $x$ . Отношение скоростей  $v_x/u_x$  имеет порядок  $\omega \ll 1$  (это подтверждают результаты, полученные ниже). Эти оценки позволяют исследовать движение воды в слое над поверхностью склона на основе уравнений Рейнольдса [8]. Пусть  $u, v$  - компоненты скорости жидкости вдоль осей  $x$  и  $y$ . Уравнения движения вязкой жидкости Рейнольдса для рассматриваемой здесь задачи записываются в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a + \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \frac{g \sin \alpha}{v}, \quad v = \frac{\mu}{\rho} \quad (5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \quad P - P_0 = \rho g \cos \alpha (h(t) - y) \quad (6)$$

Здесь в силу второго равенства в (4) принято, что  $P_1 \approx P_0$ . Отметим, что эти же уравнения описывают движение жидкости в слое малой толщины на криволинейной поверхности с малой кривизной, если координата  $x$  направлена вдоль этой поверхности, ось  $y$  - по нормали к ней [8, 9].

Уравнение параболического типа (5) здесь решается методом последовательных приближений, изложенным в работе [10]. Обратимся к квазистатическому уравнению, полученному из уравнения (5):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (7) дважды по  $y$ , приходим к выражениям

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ay + C_1, \quad u = -\frac{a}{2} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (8)$$

Произвольные функции времени  $C_1, C_2$  в решении (8) определяются граничными условиями уравнения (5).

На поверхности склона это условие запишется так:

$$y = 0, \quad u(0, t) = 0 \quad (9)$$

Второе граничное условие определяется последним равенством в формуле (4)

$$\begin{aligned} y = h(t), \quad \rho \omega(\dot{h} + V \cos \alpha)(V \sin \alpha - u_x) &= \tau_x \\ \tau_x &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} \end{aligned} \quad (10)$$

Из условий (9) и (10) получим;  $C_2 = 0$ .

$$C_1 = \frac{\rho\omega(\dot{h} + V \cos \alpha) \left( \frac{a}{2} h^2 + V \sin \alpha \right) + \mu a h}{\mu + \rho\omega(\dot{h} + V \cos \alpha)} \quad (11)$$

Итак, решение квазистатического уравнения (7) представляется формулой

$$u_1 = -\frac{a}{2} y^2 + C_1(t) y \quad (12)$$

Дифференцирование по времени первого приближения (12) дает

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \dot{u}_1 = \dot{C}_1 y, \quad C_1 = \frac{dC_1}{dt} \quad (13)$$

Подставив это значение производной в правую часть уравнения (5), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a + \frac{1}{v} \dot{C}_1 y$$

После двукратного интегрирования его по  $y$  приходим к соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ay + \frac{1}{2v} C_1 y^2 + C_3, \quad u = -\frac{a}{2} y^2 + \frac{1}{6v} C_1 y^3 + C_3 y + C_4 \quad (14)$$

За второе приближение решения уравнения (5) берется сумма  $u_1 + u_2$ , где  $u_2$  дано формулой (14)

$$u_2 = u_1 + u = -ay^2 + C_1 y + \frac{1}{6v} C_1 y^3 + C_3 y + C_4 \quad (15)$$

Функции времени  $C_3, C_4$  также определяются условиями (9) и (10). Их значения следующие:  $C_4 = 0$ ,

$$C_3 = \frac{\rho\omega(\dot{h} + V \cos \alpha) \left( V \sin \alpha + ah^2 - C_1 h - \frac{\dot{C}_1}{6v} h^3 \right) + \mu \left( ah - C_1 - \frac{\dot{C}_1}{2v} h^2 \right)}{\mu + \rho\omega(\dot{h} + V \cos \alpha) h} \quad (16)$$

Таким образом, второе приближение решения уравнения (5) записывается в виде

$$u = u_2 = -ay^2 + C_1 y + \frac{1}{6v} C_1 y^3 + C_3 y \quad (17)$$

где функции времени  $C_1, \dot{C}_1, C_3$  определены выше.

3. Перейдем к определению толщины слоя  $h(t)$  и составляющей скорости жидкости в слое вдоль оси  $y$ . Так как параметры движения жидкости не зависят от  $x$ , в силу уравнения неразрывности несжимаемой среды, эта скорость  $v$  является только функцией времени. Из первого равенства условий (4) она определяется так:

$$v = v_x = \omega V \cos \alpha - \dot{h}(1 - \omega) \quad (18)$$

В ряде работ, например в [11], принимается, что скорость проникания жидкости в поры почвы пропорционально зависит от давления на поверхности склона. На основании формулы (6) эту зависимость можно представить равенством

$$y = 0, \quad v = v_w = k \rho g \cos \alpha h(t), \quad k = \text{const} \quad (19)$$

Равенство правых частей в формулах (18) и (19) приводит к уравнению с условиями

$$\dot{h} + \frac{k\rho g \cos \alpha}{1 - \omega} h = \frac{\omega V \cos \alpha}{1 - \omega}, \quad t = 0, \quad h = 0 \quad (20)$$

Решение уравнения (20) определяется функцией

$$h = B(1 - e^{-At}), \quad A = \frac{k\rho g \cos \alpha}{1 - \omega}, \quad B = \frac{\omega V}{k\rho g} \quad (21)$$

Теперь скорость жидкости по оси  $y$ , с учетом ее направления, согласно (18), представляется равенством

$$v = -\omega V \cos \alpha (1 - e^{-At}), \quad \omega \ll 1 \quad (22)$$

4. Для рассматриваемой задачи уравнение (3), определяющее распределение массовой концентрации частиц почвы в смеси, принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (23)$$

где  $v$  дана формулой (22). Для его решения необходимо установить граничные условия. На границе  $y = h(t)$  естественно предположить, что концентрация равна нулю

$$y = h(t), \quad c(0, t) = 0 \quad (24)$$

Граничное условие на поверхности склона может быть определено путем анализа результатов экспериментальных исследований на основе теории переноса вещества. Здесь предполагается это условие заданным:

$$y = 0, \quad c = c_0 \quad (25)$$

Уравнение (23) представим в форме

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = -b(1 - e^{-Ay}) \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad b = \frac{\omega V \cos \alpha}{D} \quad (26)$$

Будем решать это уравнение методом последовательных приближений, использованным выше. За первое приближение решения (26) возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0$$

Его решением, удовлетворяющим условиям (4) и (25), будет функция

$$c = c_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad h = h(t)$$

Подставим это решение в правую часть уравнения (26) и затем проинтегрируем его дважды по  $y$ . Последовательно будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial y} &= \frac{bc_0}{h} (1 - e^{-Ay}) y + \frac{c_0}{2D} \frac{h}{h^2} y^2 + C_1 \\ c &= \frac{bc_0}{2h} (1 - e^{-Ay}) y^2 + \frac{c_0}{6D} \frac{h}{h^2} y^3 + C_1 y + C_2 \end{aligned} \quad (27)$$

В решениях (27) величины  $C_1$ ,  $C_2$  определяются из тех же условий (24) и (25). В результате второе приближение решения уравнения (26) записывается так:

$$c = -c_0 \frac{y}{h} + \frac{bc_0}{2h} (1 - e^{-Ay}) (y^2 - hy) + \frac{c_0}{6D} \frac{h}{h^2} (y^3 - h^2 y) + c_0 \quad (28)$$

В работе [12] показано, что для задач, подчиненным уравнениям типа (26), второе приближение, построенное методом, использованным здесь, достаточно близко к точному решению уравнений. Из (28) следует:

$$\frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{c_0}{h} + \frac{bc_0}{2h}(1 - e^{-ay})(2y - h) + \frac{c_0}{6D} \frac{h}{h^2}(3y^2 - h^2) \quad (29)$$

Итак, при заданных граничных условиях (24), (25), распределение массовой концентрации определено в явном виде с помощью формул (28) и (21).

Пусть  $\bar{V}_i$  - скорость частиц в смеси,  $\bar{V}$  - скорость жидкости в слое, из определения скорости  $\bar{v}^*$ , в согласии с формулой (2), имеют место равенства [6]

$$\bar{v}^* = \bar{V}_i - \bar{V}, \quad \bar{v}^* = -\frac{D}{c} \text{grad}c \quad (30)$$

В нашей задаче последнее равенство принимает вид

$$\bar{v}^* = -\frac{D}{c} j \frac{\partial c}{\partial y} \quad (31)$$

где  $j$  - единичный вектор оси  $y$ . Пусть  $u_i, v_i$  - компоненты скорости  $\bar{V}_i$ , по осям  $x, y$ ;  $u, v$  - по-прежнему компоненты скорости  $\bar{V}$ . Из (31) следует

$$u_i = u, \quad v_i = v - \frac{D}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (32)$$

то есть скорость частиц и скорость жидкости в слое, в направлении оси  $x$  совпадают. Скорость  $v$  во втором равенстве (32) определена формулой (22). Вектор потока частиц почвы  $\bar{I}$  определяется так:

$$\bar{I} = c\bar{V}_i = c(\bar{V} + \bar{v}^*) = c\left[\bar{V} - \frac{D}{c} \text{grad}c\right]$$

В проекциях на оси координат, для рассматриваемой задачи получим

$$I_x = cu, \quad I_y = cv - D \frac{\partial c}{\partial y} \quad (33)$$

Унос массы частиц почвы потоком в единицу времени,  $q$ , вдоль поверхности склона, определяется интегралом

$$q = \int_0^h \rho_i c u dy, \quad \rho_i = \frac{\rho}{1 + c\left(\frac{\rho}{\rho_i} - 1\right)} \quad (34)$$

где  $\rho_i$  - плотность суспензии,  $c$  и  $i$  под интегралом определены формулами (28) и (17).

5. На механико-математическом факультете МГУ проводились экспериментальные исследования по ударному сжатию образцов пористой почвы. Результаты этих исследований приведены в работе [13]. В частности, построена диаграмма, устанавливающая зависимость между давлением и плотностью пористой почвы в процессе сжатия образца в пределах изменения давления от граммов на квадратный сантиметр до 10 атмосфер. По этим данным можно определить концентрацию пор после сжатия. Если поры почвы до начала сжатия и после заполнить жидкостью, то по данным работы [13] можно определить соответствующие массовые концентрации материала почвы. Такой расчет показал, что значения этих концентраций очень близки друг к другу. Например, для образца из люберецкого песка с начальной пористостью 0,442, при динамическом сжатии (давление 3,6 кгс/см), массовые концентрации материала почвы до и после сжатия соответственно равнялись 0,770 и 0,776. При этом отношение количества вещества почвы в единице объема до и после

сжатия равнялось 0,986. Если исходить из этого результата, то в рассматриваемой здесь задаче за массовую концентрацию  $c_0$  в условии (27) можно взять массовую концентрацию почвы до начала дождя, но с заполнением жидкостью порами. Тогда в приведенном примере  $c_0 = 0,770$ . Определение коэффициента  $D$  диффузии и концентрации  $c_0$  в вязкопластическом слое на поверхности склона требует дальнейших экспериментальных исследований на основе теории переноса вещества.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (Грант 96-05-65649).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Волярович М.П. Применение методов исследования вязкости и пластичности в прикладной минералогии. Тр. Ин-та прикладной минералогии, 1934, вып. 66.
2. Сагомоян А.Я. К вопросу дождевой эрозии почв - ВМУ, мат., мех., 1995, №5, с. 85-94.
3. Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей. -М.: Мир, 1965.
4. Петров А.Г., Петров П.Г. Перенос взвешанных частиц турбулентным потоком над размываемым дном. -ПМТФ, 1992, №4, с. 61-69.
5. Хан К.Ю., Кузнецов М.С., Волокитин М.П., Сон Б.К., Самойлов Р.Т. Определение устойчивости агрегатов к разрушающему действию капель. -Почвоведение, 1991, №6.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1970.
7. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. -М.: Мир, 1973.
8. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. -М.: Гостехиздат, 1955.
9. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости (ред. Гольдштейн). -М.: ИЛ, 1948.
10. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. -ПММ, 1949, т. XIII, вып.3, с.257-266.
11. Слезкин Н.А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. -ВМУ, мат., мех., 1957, №5, с. 3-5.
12. Кочетков А.М. Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязкопластической среды. -ПММ, 1950, т. XIV, вып. 4, с. 433-436.
13. Гримза Ю.И. Прямой экспериментальный метод построения ударных диаграмм сжатия грунтов. -Сб. тр. №51, НИИ оснований и подземных сооружений академии строительства и архитектуры СССР, 1950.

МГУ им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
13.12.1996