

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА ПРОГИБЫ
ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ
ТОЛЩИНЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НЕКОТОРЫХ
ФАКТОРОВ

Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ն.Գ. Արեշատյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Ստեփանյան
Փոփոխական հաստություն օրթոտրոպ օղակային սալի ճկվածքների վրա ընդլայնական սահերի
ազդեցությունը՝ կախված մի քանի գործոններից

Օգտվելով եզրային խնդիրը Կոշու խնդրի բերելու եղանակից [5], [6] (տեղում է ներքին եզրը ազատ, իսկ արտաքինը հողակապորեն ինքված, զծայնորեն փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ օղակային սալի ծոնան խնդիրը՝ ընդլայնական սահերի հաշվառմամբ [2]: Բերվում են, սալի մաքսիմում ճկվածքի անշափ մեծությունները մեխանիկա երկրաչափական պարամետրերի մի քանի բնորոշ արժեքների դեպքում: Կատարվում է օղակային և հոծ սալերի համապատասխան մեծությունների համեմատություն՝ եզրային տարրեր պայմանների դեպքում: Արվում են ճկվածքների վրա ընդլայնական սահերի ազդեցության վերաբերյալ որակական եզրակացություններ, որոնք բացահայտում են ինչպես եզրային պայմանների, այնպես էլ մեխանիկա երկրաչափական մի շարք գործոնների դերը:

N.G. Arevshatyan, R.M. Kirakosyan, S.P. Stepanyan

The Influence of Cross Displacement on the Flexure of Orthotropic Circular Plate Variable
Thickness Depend on some Factors

Пользуясь способом приведения краевой задачи к задаче Коши [5], [6], решается задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины при учете поперечного сдвига [2]. Считается, что внутренний контур пластинки свободен, а внешний — шарнирно оперт. Приводятся безразмерные значения максимальных прогибов пластинки при некоторых характерных значениях механико-геометрических параметров. Делаются качественные заключения о влиянии поперечного сдвига на прогибы пластинки, которые выявляют роль как краевых условий, так и ряда механико-геометрических факторов.

1. Рассмотрим ортотропную кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами a, b , толщина которой в радиальном направлении изменяется по линейному закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad h_1 > -\frac{h_0}{b} \quad (1.1)$$

Здесь h_0 и h_1 — заданные параметры, r — радиальная координата. Пусть пластинка несет равномерно-распределенную нормальную нагрузку интенсивности q . При этом внутренний край пластинки $r = a$ свободен, а внешний край $r = b$ — шарнирно оперт. Задачу изгиба рассматриваемой пластинки будем решать в рамках уточненной теории [2], учитывающей влияние поперечных сдвигов при переменности толщины.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что в силу осесимметричности решение задачи сводится к нахождению лишь двух функций — прогиба пластинки w и функции φ_1 , описывающей влияние поперечного сдвига.

Следуя [2], введем обозначения:

$$r = \rho c, \quad \frac{h_0}{c} = s, \quad \frac{h_1}{s} = \gamma, \quad \frac{a}{b} = k, \quad h = h_0 H$$

$$\sqrt{\frac{B_0}{B_r}} = m, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = n, \quad a_r \sigma_0 = l, \quad \frac{6q}{n \sigma_0 s^3} = q^*$$

$$w = h_0 \bar{w}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} = \alpha, \quad \varphi_1 = \sigma_0 t, \quad s\alpha - lt = y$$

$$N_r = \sigma_0 h_0 \bar{N}_r, \quad M_r = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_r, \quad M_0 = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_0 \quad (1.2)$$

Здесь s — неизвестная постоянная размерности длины; B_r , B_0 , a_r — механические параметры материала [1]; σ_0 — характерное напряжение.

Введением неизвестной постоянной краевая задача изгиба пластинки сводится к задаче Коши для следующей системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [2]:

$$\frac{dy}{d\rho} = v$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho^3 H^3} \{ q^* s \rho (\rho^2 - k^2) - \rho H^2 (1 + 4\gamma \rho) v + m^2 H^2 [1 + (1 - 3\nu_r) \gamma \rho] y \} = F(\rho, y, v) \quad (1.3)$$

$$\text{где} \quad H = 1 + \gamma \rho \quad (1.4)$$

Условия свободного и шарнирно-опертого краев пластинки имеют вид [2]

$$(\rho v + \nu_r m^2 y)|_{\rho=k} = 0 \quad (M_r|_{r=a} = M_r|_{r=b} = 0) \quad (1.5)$$

Через ρ_R обозначено то значение безразмерной координаты, при котором удовлетворяется условие шарнирного опирания внешнего контура пластинки $r = b$.

Задаваясь некоторыми значениями безразмерных параметров q^* , m , s , γ , k и выбирая начальные значения V_0 , y_0 , удовлетворяющие условию свободного края пластинки (1.5) при $\rho = k$, путем перехода к конечным разностям можно вычислить значения искомых y и v в последующих друг другу сечениях $\rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho$.

$$y_i = y_{i-1} + v_{i-1} \Delta\rho, \quad v_i = v_{i-1} + F_{i-1} \Delta\rho \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

Здесь $\Delta\rho$ — шаг численного интегрирования. Численное интегрирование системы (1.3) продолжается до того значения безразмерной координаты ρ_R , для которого удовлетворяется условие шарнирного опирания. Желательно варьированием значения параметра q^* добиться того, чтобы это условие удовлетворялось при $\rho_R = 1$. Это важно, поскольку тогда решение будет соответствовать пластинке с наперед заданными габаритными размерами. Этим фактически завершается решение задачи и можно вычислить значения расчетных величин в любом сечении пластинки. В частности, безразмерные значения прогиба и изгибающих моментов определяются формулами

$$\frac{w}{h_0} = -\frac{1}{s} \int_0^1 (y + lt) d\rho, \quad \bar{M}_r = -\frac{nsH^3}{12\rho} (\rho v + \nu_r m^2 y), \quad \bar{M}_0 = -\frac{ns m^2 H^3}{12\rho} (v, \rho v + y) \quad (1.7)$$

2. В табл. 1-3 представлены значения величин

$$w_{\kappa, \text{ш}} = \frac{w_0}{h_0} \frac{h_0^3}{b^3} \frac{B_r}{6q}, \Delta_{\kappa, \text{ш}} = \frac{w_0' - w_0^{\kappa \lambda}}{w_0^{\kappa \lambda}} 100\% \quad (2.1)$$

$$\sqrt{B_0/B_r} = 0.5; \quad \nu_r = 0.3; \quad s = 0.1$$

Таблица 1

$k = 0.1$									
шарнирное опирание									
$h_1 b / h_0$	-0.5			0			1		
B_r / G_r	0	50	100	0	30	50	0	10	20
$w_{\kappa, \text{ш}}^*$	9.74	10.0	10.3	4.16	4.32	4.42	1.17	1.21	1.24
$\Delta_{\kappa, \text{ш}}$	—	2.89	5.78	—	3.75	6.25	—	3.00	6.00
$w_{\text{спл}, \text{ш}}^*$	7.01	7.21	7.40	3.81	3.99	4.12	1.46	1.52	1.58
$\Delta_{\text{спл}, \text{ш}}$	—	2.77	5.55	—	4.92	8.20	—	4.38	8.76
$\Delta_{\kappa, \text{ш}} / \Delta_{\text{спл}, \text{ш}}$	—	1.04	1.04	—	0.76	0.76	—	0.68	0.68
защемление									
$w_{\kappa, \text{з}}^*$	2.04	2.53	3.01	0.52	0.70	0.82	0.11	0.14	0.17
$\Delta_{\kappa, \text{з}}$	—	23.8	47.6	—	33.7	56.2	—	30.5	60.7
$w_{\text{спл}, \text{з}}^*$	1.64	2.09	2.55	0.48	0.66	0.79	0.11	0.15	0.19
$\Delta_{\text{спл}, \text{з}}$	—	27.9	55.7	—	39.2	65.5	—	34.0	67.9
$\Delta_{\kappa, \text{з}} / \Delta_{\text{спл}, \text{з}}$	—	0.85	0.85	—	0.86	0.86	—	0.90	0.90
$\Delta_{\kappa, \text{з}} / \Delta_{\kappa, \text{ш}}$	—	8.23	8.23	—	9.06	8.99	—	10.2	10.1
$k = 0.01$									
шарнирное опирание									
$w_{\kappa, \text{ш}}^*$	7.13	7.34	7.56	4.69	4.89	5.03	1.28	1.34	1.39
$\Delta_{\kappa, \text{ш}}$	—	3.03	6.05	—	4.33	7.21	—	4.20	8.41
$\Delta_{\kappa, \text{ш}} / \Delta_{\text{спл}, \text{ш}}$	—	1.09	1.09	—	0.88	0.88	—	0.96	0.96
защемление									
$w_{\kappa, \text{з}}^*$	1.71	2.17	2.64	0.49	0.68	0.81	0.11	0.15	0.18
$\Delta_{\kappa, \text{з}}$	—	27.3	54.6	—	37.9	63.1	—	32.3	64.7
$\Delta_{\kappa, \text{з}} / \Delta_{\text{спл}, \text{з}}$	—	0.98	0.98	—	0.96	0.96	—	0.95	0.95
$\Delta_{\kappa, \text{з}} / \Delta_{\kappa, \text{ш}}$	—	9.01	9.02	—	8.75	8.75	—	7.69	7.69

$$\sqrt{B_0/B_c} = 1; \quad \nu_c = 0.3; \quad s = 0.1$$

Таблица 2

$k = 0.1$									
шарнирное опирание									
$h_1 b / h_0$	-0.5			0			1		
B_r / G_{rc}	0	50	100	0	30	50	0	10	20
$w_{к,ш}$	2.95	3.26	3.57	1.21	1.38	1.49	0.42	0.46	0.51
$\Delta_{к,ш}$	—	10.5	21.0	—	13.6	22.7	—	10.4	20.7
$w_{с\pi\lambda,ш}^*$	3.00	3.31	3.62	1.28	1.47	1.59	0.40	0.45	0.50
$\Delta_{с\pi\lambda,ш}$	—	10.3	20.7	—	14.8	24.2	—	12.5	25.0
$\Delta_{к,ш} / \Delta_{с\pi\lambda,ш}$	—	1.01	1.01	—	0.92	0.94	—	0.83	0.83
защемление									
$w_{к,з}^*$	1.08	1.52	1.97	0.33	0.51	0.63	0.08	0.11	0.15
$\Delta_{к,з}$	—	41.6	83.4	—	53.3	88.8	—	42.8	85.4
$w_{с\pi\lambda,з}^*$	1.00	1.36	1.73	0.31	0.50	0.62	0.08	0.12	0.16
$\Delta_{с\pi\lambda,з}$	—	36.1	72.1	—	61.3	100.0	—	49.0	97.9
$\Delta_{к,з} / \Delta_{с\pi\lambda,з}$	—	1.15	1.16	—	0.87	0.89	—	0.87	0.87
$\Delta_{к,з} / \Delta_{к,ш}$	—	3.97	3.97	—	3.91	3.91	—	4.13	4.13
$k = 0.01$									
шарнирное опирание									
$w_{к,ш}^*$	2.97	3.28	3.59	1.23	1.41	1.53	0.40	0.45	0.50
$\Delta_{к,ш}$	—	10.4	20.8	—	14.9	24.9	—	12.6	25.2
$\Delta_{к,ш} / \Delta_{с\pi\lambda,ш}$	—	1.00	1.00	—	1.00	0.97	—	1.00	1.00
защемление									
$w_{к,з}^*$	1.01	1.46	1.91	0.314	0.501	0.626	0.079	0.117	0.156
$\Delta_{к,з}$	—	45.1	90.1	—	59.6	99.4	—	48.5	97.1
$\Delta_{к,з} / \Delta_{с\pi\lambda,з}$	—	1.25	1.25	—	0.97	0.99	—	0.99	0.99
$\Delta_{к,з} / \Delta_{к,ш}$	—	4.10	4.10	—	3.93	3.93	—	3.80	3.80

$$\sqrt{B_0/B_r} = 2; \quad \nu_r = 0.3; \quad s = 0.1$$

Таблица 3

$k = 0.1$									
шарнирное опирание									
$h_1 b / h_0$	-0.5			0			1		
B_r / G_{rz}	0	20	40	0	10	20	0	5	10
$w_{к,ш}$	1.08	1.23	1.38	0.45	0.51	0.58	0.12	0.14	0.16
$\Delta_{к,ш}$	—	13.8	27.6	—	14.5	28.9	—	18.8	37.6
$w_{сдл,ш}^*$	1.07	1.22	1.38	0.38	0.44	0.50	0.10	0.13	0.15
$\Delta_{сдл,ш}$	—	14.0	27.1	—	15.8	31.6	—	30.0	50.0
$\Delta_{к,ш} / \Delta_{сдл,ш}$	—	0.98	1.02	—	0.91	0.91	—	0.63	0.75
защемление									
$w_{к,з}^*$	0.51	0.68	0.86	0.17	0.23	0.28	0.045	0.064	0.082
$\Delta_{к,з}$	—	33.9	67.8	—	35.4	70.8	—	40.7	81.5
$w_{сдл,з}^*$	0.52	0.70	0.88	0.17	0.23	0.29	0.04	0.06	0.08
$\Delta_{сдл,з}$	—	35.0	69.9	—	37.4	74.7	—	44.3	88.7
$\Delta_{к,з} / \Delta_{сдл,з}$	—	0.97	0.97	—	0.95	0.95	—	0.92	0.92
$\Delta_{к,з} / \Delta_{к,ш}$	—	2.46	2.46	—	2.45	2.45	—	2.16	2.16
$k = 0.01$									
шарнирное опирание									
$w_{к,ш}$	1.07	1.22	1.38	0.38	0.45	0.51	0.11	0.13	0.15
$\Delta_{к,ш}$	—	14.5	29.0	—	16.4	32.9	—	21.3	42.6
$\Delta_{к,ш} / \Delta_{сдл,ш}$	—	1.03	1.04	—	1.04	1.04	—	0.71	0.85
защемление									
$w_{к,з}^*$	0.51	0.69	0.88	0.17	0.23	0.29	0.045	0.065	0.085
$\Delta_{к,з}$	—	35.0	69.9	—	37.4	74.7	—	44.4	88.7
$\Delta_{к,з} / \Delta_{сдл,з}$	—	1.00	1.00	—	1.00	1.00	—	1.00	1.00
$\Delta_{к,з} / \Delta_{к,ш}$	—	2.41	2.41	—	2.28	2.27	—	2.08	2.08

подсчитанные при некоторых характерных значениях параметров $\sqrt{B_0/B_r}$, $h_1 b / h_0$, a/b . Через $w_{к,з}^*$ и w_0 обозначены прогибы на внутреннем контуре пластинок, полученные по классической и уточненной теориям. Величина $\Delta_{к,ш}$ определяет поправку к наибольшему прогибу пластинки в процентах, вносимую учетом поперечного сдвига. Для сравнения в таблицах приведены также безразмерные прогибы и соответствующие поправки для защемленной по внешнему контуру кольцевой пластинки $w_{к,з}^*$, $\Delta_{к,з}$ [4]. Представлены также аналогичные

величины сплошной пластинки как при шарнирном опирании $w_{сплш}^*$, $\Delta_{сплш}^*$, так и при защемлении контура $w_{сплз}^*$, $\Delta_{сплз}^*$ [3].

С целью выявления роли отверстия кольцевой пластинки, а также вида краевых условий в таблицах приведены отношения соответствующих поправок наибольших прогибов пластинки

На фиг. 1-3 проиллюстрированы графики изменения безразмерного изгибающего момента радиального направления шарнирно-опертой пластинки для трех характерных случаев ортотропии материала. На каждой фигуре представлены по три графика, из которых один соответствует сплошной пластинке ($k = 0$), а два — кольцевой ($k = 0,1$ и $k = 0,01$).

Данные таблиц и графики фигур приводят к следующим заключениям:

1. Подобно случаю пластинки постоянной толщины при возрастании отношения модулей крутового и радиального направлений $m^2 = E_0 / E_r$, значение наибольшего прогиба убывает. Это заключение верно как при шарнирном опирании, так и при защемлении внешнего контура пластинки для любых значений параметров $\gamma = h_1 b / h_0$, $k = a / b$ и $l = B_r / G_r$.

2. Учет влияния поперечного сдвига, как и следовало ожидать, приводит к увеличению наибольших прогибов пластинки переменной толщины.

3. Поправка, вносимая уточненной теорией, при данных краевых условиях зависит от характера анизотропии и от относительной толщины пластинки.

Она увеличивается с ростом:

а) параметра l , т.е. с уменьшением относительного модуля сдвига материала в поперечной плоскости;

б) отношения модулей Юнга крутового и радиального направлений E_0 / E_r ;

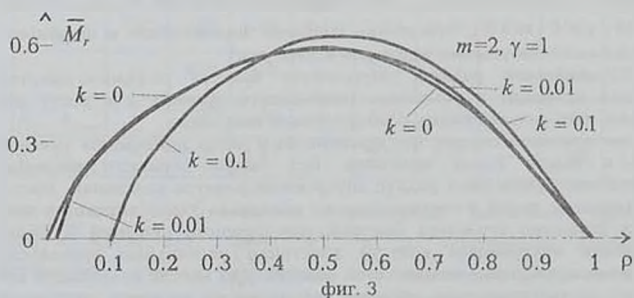
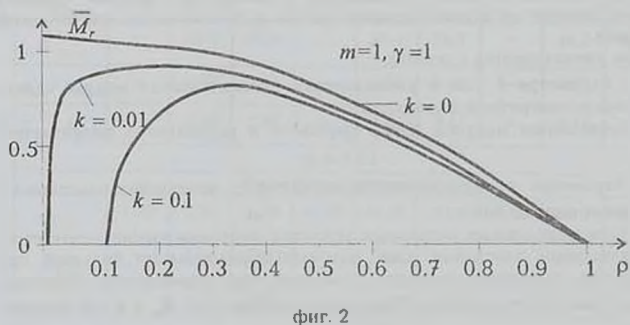
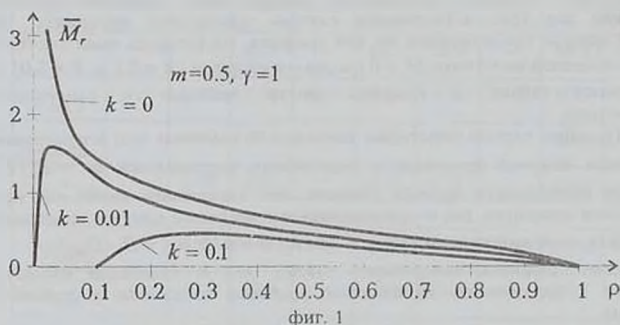
в) параметра γ , характеризующего быстроту утолщения пластинки в радиальном направлении.

4. При неизменных остальных условиях поправка сильно зависит от вида крепления пластинки. Она получается значительно большей при защемлении внешнего контура, чем при его шарнирном опирании. Причем, роль этого фактора более существенна при $E_0 < E_r$ и заметно ослабевает с возрастанием E_0 / E_r . Например, при росте E_0 / E_r от 0.25 ($m = 0.5$) до 4 ($m = 2$), отношение поправок защемленной и шарнирно-опертой пластинок убывает примерно в пять раз.

5. Уменьшение радиуса внутреннего контура шарнирно-опертой пластинки приводит к убыванию наибольшего прогиба и к росту его поправки, чего нельзя сказать о защемленной пластинке.

В заключение отметим, что применяемый метод приведения краевой задачи к задаче Коши позволяет, без ущерба точности решения, неограниченно уменьшить радиус внутреннего контура пластинки. Метод же колокаций такой возможностью не обладает. Это объясняется тем, что для описания характера быстрой изменяемости решений в малой окрестности внутреннего контура пластинки необходимо произвести более детальную дискретизацию этой области. Для метода колокаций это означает соответствующим образом увеличить число точек разбиения области, примыкающей к внутреннему контуру пластинки, что приводит к резкому повышению порядка разрешающей системы алгебраических уравнений. В результате этого накопление ошибок вычислений увеличивается настолько, что накладывает ограничение сверху на число разбиения. В случае же метода приведения краевой задачи к задаче Коши цель описания характера быстрой изменяемости решения достигается

путем уменьшения шага интегрирования, что приводит не к уменьшению, а, наоборот, к увеличению точности вычислений. Благодаря этому, шаг интегрирования можно уменьшить сколь угодно, что позволит решение сплошной пластинки получить из соответствующего решения кольцевой пластинки путем предельного перехода при $k \rightarrow 0$. В справедливости этого утверждения можно убедиться как из данных табл. 1+3, так и графиков фиг. 1+3.



Любопытно, что условие свободного края на внутреннем контуре пластинки $\rho_0 = k$ не мешает предельному переходу. Это физически легко объяснимо, ибо наличие бесконечно узкого отверстия в центре пластинки не должно влиять на значения расчетных величин. С этой

точки зрения наиболее интересным является случай $E_0 < E_r$, при котором в центре сплошной пластинки ($k=0$) изгибающие моменты имеют особенность. На фиг. 1 иллюстрирован характер изменения радиального изгибающего момента M_r в окрестности внутреннего контура пластинки для случая $E_0/E_r = 0.25$ ($m = 0.5$). При $k \rightarrow 0$ изгибающий момент M_r с удалением от внутреннего контура пластинки с огромной скоростью растет от нуля до значения, соответствующего случаю сплошной пластинки. Разумеется, это явление имеет место и в других характерных случаях ортотропии, то есть при $E_0 = E_r$ и при $E_0 > E_r$ (фиг. 2, 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. -М.: Наука, Гостехиздат, 1987. 360с.
2. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. - Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
3. Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П. Изгиб ортотропной круглой пластинки переменной толщины с учетом поперечного сдвига. - Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №3-4, с.64-68.
4. Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П. Изгиб защемленной ортотропной кольцевой пластинки переменной толщины с учетом поперечного сдвига. - Изв. НАН Армении, Механика, 1998, т.51, №3, с.3-7.
5. Ильющин А.А. Пластичность. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Киракосян Р.М. Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределами упругости материала. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т.30, №1, с.21-32.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.11.1996

