

УДК 621.81

МЕТОД РАСЧЕТА ВИБРОПРОЧНОСТИ ВАЛОВ
Г.А. Артемян

Հ.Ա. Արտեմյան

Լիսենզիայի վերականգնողական հաշվարկի մեթոդ

Անալիզվում է լիսենզիայի ինժեներների տասնամյան ղեկավարի մոլի, մեքենաների արտադրման փակերևույթների վրա ազդող վիբրացիոն բեռների ազդեցության դեպքում, ստացված են անհրաժեշտ հաշվարկային կախվածություններ լիսենզիայի վերականգնողական գնահատման համար:

H.L. Artemyan

Method of calculation of vibration firm of shaft

Предложена динамическая модель колебания опор валов при воздействии на вращающуюся поверхность машины вибрационной нагрузки, получены необходимые расчетные соотношения для оценки вибропрочности валов.

1. Постановка задачи. Вибропрочность — это свойство машины противостоять действию вибрационных нагрузок и выполнять свое функциональное назначение с сохранением выходных параметров после воздействия этих нагрузок. Вал машины считается вибропрочным, если под действием вибрационной нагрузки максимальные напряжения в любом его сечении не превосходят предел упругости материала вала.

Известные экспериментальные методы оценки вибрационной прочности машин предусматривают их установку на вибростендах (в нерабочем состоянии машины) и реализацию длительного воздействия вибрационных нагрузок. Очевидно, что динамическая модель расчета вибропрочности машин, достоверность которой может быть оценена только экспериментально, должна учитывать эту специфику проведения испытаний на вибропрочность. Сложность задачи в том, что выбранная модель должна позволять определять параметры нагрузок, непосредственно воспринимаемых отдельными элементами машины (в том числе и вала), когда на внешнюю поверхность машины действует вполне определенная вибрационная нагрузка. Эта особенность расчетной модели не позволяет однозначно применять известные методы расчета динамической прочности валов [1, 2, 3], в которых величины действующих на вал нагрузок предполагаются известными.

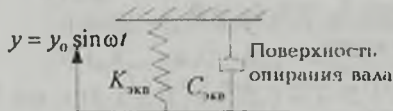
2. Выбор динамической модели. Как правило, споры не ведутся, выполняются в виде конструктивных соединений различных деталей (станины, подшипники, упругие опоры и т.д.). Выбор эквивалентной схемы колебания вала при воздействии на внешнюю поверхность машины вибрационной нагрузки нами осуществляется исходя из соображений, что массивные детали опор вала обладают только инерционным свойством, а контактные поверхности их соединений — определенной упругостью и вязкостью. Предполагается также, что каждая масса может совершить только колебательное движение по линии действия внешнего возбуждения (т.е. обладает одной степенью свободы). Построенная на таких предположениях модель колебаний опор вала приведена на фиг. 1, где введены обозначения:

m_i — массы крупных деталей опор вала $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} & (-m_l \omega^2 + K_l + K_{l+1}) A_l - K_l A_{2l-1} - K_{l+1} A_{2l+2} + (C_l + C_{l+1}) \omega A_{2l-1} - C_l \omega A_{2l+1} - C_{l+1} \omega A_{2l+3} = 0 \\ & (-m_n \omega^2 + K_n + K_{n+1}) A_{2n-1} - K_n A_{2n-2} - (C_n + C_{n+1}) \omega A_{2n} + C_n \omega A_{2n-2} = 0 \\ & (-m_n \omega^2 + K_n + K_{n+1}) A_{2n} - K_n A_{2n-1} + (C_n + C_{n+1}) \omega A_{2n-1} - C_n \omega A_{2n-3} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Сила, действующая на поверхность опирания вала, будет:

$$F_1 = K_{n+1} y_n + C_{n+1} \dot{y}_n = \sin \omega t (A_{2n+1} K_{n+1} - \omega A_{2n+2} C_{n+1}) + \cos \omega t (A_{2n} K_{n+1} + \omega A_{2n+1} C_{n+1}) \quad (4)$$



Фиг. 2 Эквивалентная система колебаний опор вала

С целью упрощения дальнейших математических выкладок и построения конечных решений при рассмотрении задачи колебания вала, представленную на (фиг. 1) систему заменим эквивалентной системой

(фиг. 2). Тогда действующая на вал сила будет:

$$F_2 = K_{экр} y_0 \sin \omega t + \omega C_{экр} y_0 \cos \omega t \quad (5)$$

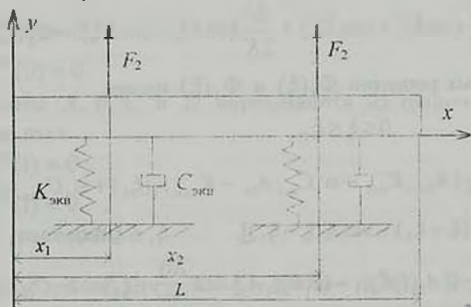
Условие необходимого равенства сил F_1 и F_2 приводит к системе для определения $K_{он}$ и $C_{он}$:

$$\begin{aligned} K_{экр} y_0 &= A_{2n+1} K_{n+1} - \omega C_{n+1} A_{2n} \\ C_{экр} y_0 \omega &= A_{2n} K_{n+1} + \omega C_{n+1} A_{2n-1} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} K_{экр} &= \frac{A_{2n+1} K_{n+1} - \omega C_{n+1} A_{2n}}{y_0} \\ C_{экр} &= \frac{A_{2n} K_{n+1} + \omega C_{n+1} A_{2n-1}}{y_0 \omega} \end{aligned} \quad (6)$$

4. Вибропрочность вала. Изгибные колебания вала описываются по схеме колебания балки постоянного сечения под действием сосредоточенных в двух точках сил (фиг. 3).



Фиг. 3 Схема колебания вала

Уравнение колебания вала с учетом только упругих и инерционных сил будет:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} Q(x, t) \quad (7)$$

где I - момент инерции вала m^4 ; E - модуль упругости материала вала H/m^2 ; F - площадь поперечного сечения вала m^2 ; ρ - масса единицы объема $кг/m^3$; t - время, с.

$$Q(x, t) = \begin{cases} 0 - \text{по всем сечениям вала, кроме сечений } x=x_1 \text{ и } x=x_2 \\ F_2 - K_{\text{зкв}} y(x, t) - C_{\text{зкв}} \dot{y}(x, t), x \in [x_1, x_1 + \delta_1] \cup [x_2, x_2 + \delta_2] \end{cases}$$

Сосредоточенные силы $Q(x, t)$ рассматриваются как предельные положения сил, распределенных в интервалах $[x_1, x_1 + \delta_1]$ и $[x_2, x_2 + \delta_2]$ с интенсивностями q_1 и q_2 на единицу длины, при условии, что [3]

$$q_1 \delta_1 \rightarrow Q, \quad q_2 \delta_2 \rightarrow Q \quad \text{при} \quad \delta_1 \rightarrow 0, \quad \delta_2 \rightarrow 0$$

Решение уравнения (7) ищем в виде:

$$y(\xi, t) = y_1(\xi) \sin \omega_1 t + y_2(\xi) \cos \omega_1 t, \quad \text{где } \xi = x / L \quad (8)$$

Тогда сила определится по формуле

$$Q(x, t) = [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{зкв}} y_1(\xi) + \omega_1 C_{\text{зкв}} y_2(\xi)] \sin \omega_1 t + \\ + [A_{2n-1} K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{зкв}} y_2(\xi) - \omega_1 C_{\text{зкв}} y_1(\xi)] \cos \omega_1 t \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение (7), получим два уравнения для определения $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$:

$$y_1''''(\xi) - K^4 y_1(\xi) = \frac{L^4}{EI} [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{зкв}} y_1(\xi) + \omega_1 C_{\text{зкв}} y_2(\xi)] \\ y_2''''(\xi) - K^4 y_2(\xi) = \frac{L^4}{EI} [A_{2n} K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1} A_{2n-1} - K_{\text{зкв}} y_2(\xi) - \omega_1 C_{\text{зкв}} y_1(\xi)] \quad (10)$$

$$\text{где } K^4 = \frac{\rho F \omega_1^2 L^4}{EI}$$

Решение системы (10) ищем в виде

$$y_1(\xi) = \frac{A}{2} (\text{ch} K \xi + \cos K \xi) + \frac{B}{2K} (\text{sh} K \xi + \sin K \xi) + \Phi_1(\xi) \\ y_2(\xi) = \frac{C}{2} (\text{ch} K \xi + \cos K \xi) + \frac{D}{2K} (\text{sh} K \xi + \sin K \xi) + \Phi_2(\xi) \quad (11)$$

Для частных решений $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$ имеем

$$\Phi_1(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ \frac{L^3}{2EIK^3} [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{зкв}} y_1(\xi_1) + \omega_1 C_{\text{зкв}} y_2(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh} K(\xi - \xi_1) - \sin K(\xi - \xi_1)], & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ \frac{L^3}{2EIK^3} \{ [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{зкв}} y_1(\xi_1) + \omega_1 C_{\text{зкв}} y_2(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh} K(\xi - \xi_1) - \sin K(\xi - \xi_1)] + [\text{sh} K(\xi - \xi_2) - \sin K(\xi - \xi_2)] \times \\ \times [A_{2n-1} K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{зкв}} y_1(\xi_2) + \omega_1 C_{\text{зкв}} y_2(\xi_2)] \}, & \xi_2 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (12)$$

где $\xi_1 = x_1 / L$; $\xi_2 = x_2 / L$

$$\Phi_2(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ \frac{L^3}{2EIK^3} [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1} A_{2n-1} - K_{\text{экв}} y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{экв}} y_1(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh}K(\xi - \xi_1) - \sin K(\xi - \xi_1)], & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\ \frac{L^3}{2EIK^3} \{ [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1} A_{2n-1} - K_{\text{экв}} y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{экв}} y_1(\xi_1)] \times \\ \times [\text{sh}K(\xi - \xi_1) - \sin K(\xi - \xi_1)] + [\text{sh}K(\xi - \xi_2) - \sin K(\xi - \xi_2)] \times \\ \times [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1} A_{2n-1} - K_{\text{экв}} y_2(\xi_2) - \omega_1 C_{\text{экв}} y_1(\xi_2)] \}, & \xi_2 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

Для $y_1(\xi_1)$, $y_1(\xi_2)$, $y_2(\xi_1)$ и $y_2(\xi_2)$ имеем:

$$\begin{aligned} y_1(\xi_1) &= \frac{A}{2} (\text{ch}K\xi_1 + \cos K\xi_1) + \frac{B}{2K} (\text{sh}K\xi_1 - \sin K\xi_1) \\ y_1(\xi_2) &= \frac{A}{2} (\text{ch}K\xi_2 + \cos K\xi_2) + \frac{B}{2K} (\text{sh}K\xi_2 - \sin K\xi_2) + \\ &+ \frac{L^3}{2K^3 EI} [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{экв}} y_1(\xi_1) + C_{\text{экв}} y_2(\xi_1)] \times \\ &\times [\text{sh}K(\xi_2 - \xi_1) - \sin K(\xi_2 - \xi_1)] \\ y_2(\xi_1) &= \frac{C}{2} (\text{ch}K\xi_1 + \cos K\xi_1) + \frac{D}{2K} (\text{sh}K\xi_1 - \sin K\xi_1) \\ y_2(\xi_2) &= \frac{C}{2} (\text{ch}K\xi_2 + \cos K\xi_2) + \frac{D}{2K} (\text{sh}K\xi_2 - \sin K\xi_2) + \\ &+ \frac{L^3}{2K^3 EI} [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1} A_{2n} - K_{\text{экв}} y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{экв}} y_1(\xi_1)] \times \\ &\times [\text{sh}K(\xi_2 - \xi_1) - \sin K(\xi_2 - \xi_1)] \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия на левом конце вала удовлетворятся тождественно:

$$y_1''(0) = y_1'''(0) = 0$$

$$y_2''(0) = y_2'''(0) = 0$$

Коэффициенты A , B , C и D определяются из граничных условий на правом конце вала:

$$y_1''(1) = y_1'''(1) = 0$$

$$y_2''(1) = y_2'''(1) = 0 \quad (15)$$

т.е. из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{AK^2}{2} (\text{ch}K - \cos K) + \frac{BK}{2} (\text{sh}K - \sin K) + \Phi_1''(1) &= 0 \\ \frac{AK^3}{2} (\text{sh}K + \sin K) + \frac{BK^2}{2} (\text{ch}K - \cos K) + \Phi_1'''(1) &= 0 \\ \frac{CK^2}{2} (\text{ch}K - \cos K) + \frac{DK}{2} (\text{sh}K - \sin K) + \Phi_2''(1) &= 0 \\ \frac{CK^3}{2} (\text{sh}K + \sin K) + \frac{DK^2}{2} (\text{ch}K - \cos K) + \Phi_2'''(1) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_1''(1) &= \frac{L^3}{2EI} \{ [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{экв}}y_1(\xi_1) + \omega_1 C_{\text{экв}}y_2(\xi_1)] \times \\
&\times [\text{sh}K(1-\xi_1) + \sin K(1-\xi_1)] + [\text{sh}K(1-\xi_2) + \sin K(1-\xi_2)] \times \\
&\times [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{экв}}y_1(\xi_2) + \omega_1 C_{\text{экв}}y_2(\xi_2)] \} \\
\Phi_1'''(1) &= \frac{L^3}{2EI} \{ [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{экв}}y_1(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{экв}}y_2(\xi_1)] \times \\
&\times [\text{ch}K(1-\xi_1) + \cos K(1-\xi_1)] + [\text{ch}K(1-\xi_2) - \cos K(1-\xi_2)] \times \\
&\times [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{\text{экв}}y_1(\xi_2) + \omega_1 C_{\text{экв}}y_2(\xi_2)] \} \\
\Phi_2''(1) &= \frac{L^3}{2EI} [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{экв}}y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{экв}}y_1(\xi_1)] \times \\
&\times [\text{sh}K(1-\xi_1) + \sin K(1-\xi_1)] \\
\Phi_2'''(1) &= \frac{L^3}{2EI} \{ [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{экв}}y_2(\xi_1) - \omega_1 C_{\text{экв}}y_1(\xi_1)] \times \\
&\times [\text{ch}K(1-\xi_1) + \cos K(1-\xi_1)] + [\text{ch}K(1-\xi_2) + \cos K(1-\xi_2)] \times \\
&\times [A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{\text{экв}}y_2(\xi_2) - \omega_1 C_{\text{экв}}y_1(\xi_2)] \} \quad (17)
\end{aligned}$$

Максимальные напряжения в любом сечении вала определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{EI}{W} \sqrt{[y_1''(\xi)]^2 + [y_2''(\xi)]^2} \quad (18)$$

где W - момент сопротивления сечения вала м^4 .

Сечение $\xi = \xi_0$ с наибольшим напряжением определяется из условия

$$y_1'''(\xi) + y_2'''(\xi) = 0 \quad (19)$$

Условие прочности будет

$$\sigma(\xi_0) < \frac{\sigma_y}{K_0} \quad (20)$$

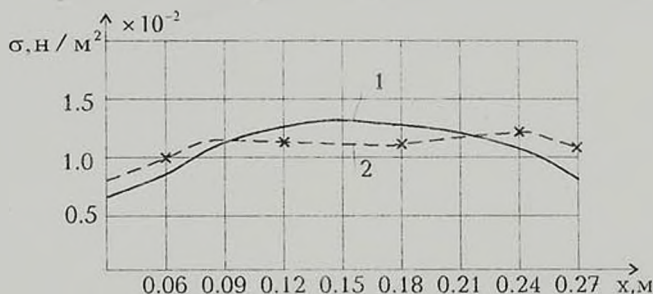
где σ_y - предел пропорциональности материала вала, Н/м^2 ; K_0 - коэффициент запаса прочности, который выбирается с учетом неточностей расчетного определения максимальных напряжений, неоднородностей материала вала, износа и старения опорных конструкций вала, технологических концентраторов напряжений: $K = 1,4 \div 3,0$.

Проверка предложенного метода расчета вибропрочности вала была осуществлена на электрических машинах типа АИ50В2. Для испытания на вибропрочность машины жестко установились на платформе вибростенда типа JMV (Япония) с широким диапазоном вариации частот и амплитуд вибрационных нагрузок. Испытания были проведены на трех машинах последовательно, при фиксированной нагрузке с частотой 100 Гц и амплитудой ускорения 2000 Н. Опора вала машины АИ50В2 из себя представляет трехмассовую систему (масса подшипника m_1 , подшипникового щита m_2 и корпуса m_3), соединенных между собой упруговязкими элементами, имитирующих прессовую посадку соединения вала с внутренним кольцом подшипника (K_2 и C_2), скользящие посадки наружного кольца подшипника с подшипниковым гнездом щита (K_3 и C_3), подшипникового щита и корпуса машины (K_4

и C_4). На валу каждой испытуемой машины были наклеены проволоочные тензодатчики для замера деформаций точек поверхности различных сечений вала. Измерения деформаций проводились прибором СИД-1. Испытания осуществлялись в перабочем состоянии испытуемых машин.

Исходные данные для расчетной оценки напряженного состояния вала:

$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $I = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4$; $F = 0.154 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $m_1 = 0.028 \text{ кг}$; $m_2 = 0.125 \text{ кг}$; $m_3 = 2.75 \text{ кг}$; $K_1 = 0$; $K_2 = 0.432 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$; $K_3 = 0.69 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$; $K_4 = 0.13 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$; $C_1 = 0$; $C_2 = 1.2 \text{ Н} \cdot \text{с/ек/м}$; $C_3 = 0.156 \text{ Н} \cdot \text{с/ек/м}$; $C_4 = 0.26 \text{ Н} \cdot \text{с/ек/м}$



Фиг. 4 Распределение максимального напряжения в сечении вала
1 — теоретическое, 2 — экспериментальное.

Сравнительные результаты экспериментов и теоретических расчетов, представленные на фиг. 4, свидетельствуют о достаточно высокой точности разработанного метода расчета вибропрочности вала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И.М. Теория колебаний.-М.: Наука, 1965.
2. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. -М.: Изд. АН СССР, 1969.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем.-М.: Машиностроение, 1970

Военный институт МО РА

Поступила в редакцию
17.04.1996