

УДК 539.376

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ МОНОКРИСТАЛЛА

Симонян А.М.

Ա.Մ. Սիմոնյան

Մթնոլորտի զանազան կոնստրուկցիաների հաշվարկի և նախագծման մասին

Ներկա աշխատանքում լիպոկալցիաների սակի կոնցեպցիայի կիսան վրա ղյուսարկվում են բյուրեղային ատոմների օպտիմալ օրինադասիայի հարցերը ծավալ և ձգվող էլեմենտների համար, ինչպես նաև խողովակների համար, որոնք գտնվում են ներքին ճնշման ազդեցության վրա:

A.M. Simonian

On Calculation and Projection of Constructions Produced from Single Crystals

В последние годы определенный интерес проявляется к монокристаллам как к конструкционным материалам, что связано с отсутствием у них границ зерен, обычно являющихся очагами для третьей стадии ползучести и трещинообразования.

В настоящей работе на основе концепции скольжения дислокаций в системах скольжения, связанных с кристаллической структурой, анализируются вопросы оптимального ориентирования кристаллических осей гранецентрированного кубического монокристалла для изгибаемых и растягиваемых элементов, а также для труб, подверженных действию внутреннего давления. В качестве критериев для оценки работоспособности конструкции рассмотрены сдвигающие напряжения в системах скольжения, а также значения урутой энергии скольжения. Показано, что у растянутых элементов изменение весущей способности в зависимости от ориентации кристаллических осей может достигать 45.5%.

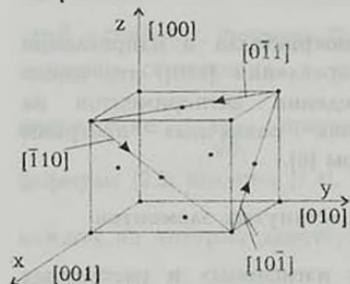
В последние десятилетия все большее внимание уделяется вопросам получения, исследования и применения металлических монокристаллов [1]. Вследствие отсутствия у монокристаллов границ зерен, которые являются очагами для третьей стадии ползучести и трещинообразования [2,3], монокристаллы в ряде случаев являются более надежными конструкционными материалами, чем аналогичные поликристаллы. Как отмечено в работе [4], монокристаллы в настоящее время используются для изготовления таких ответственных конструкций, как лопатки турбин и самолетостроении.

В настоящей работе анализируются вопросы оптимального ориентирования кристаллических осей гранецентрированного кубического монокристалла для изгибаемых и растягиваемых элементов и труб, подверженных действию внутреннего давления. В основе этих исследований положены теоретические предпосылки, изложенные в работе [5] и получившие экспериментальные подтверждения в работе [6].

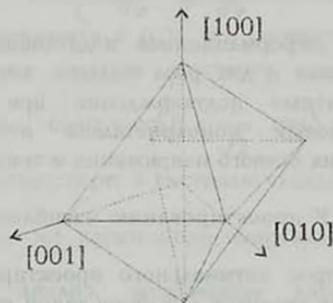
1. Основные теоретические положения

Как известно, монокристаллы отличаются от поликристаллов постоянством ориентации атомных плоскостей, что во всяком случае предопределяет анизотропию его деформационных и прочностных свойств [7]. Деформативность и прочность монокристаллов в известной мере определяются скольжением дислокаций в так называемых системах скольжений, представляющих собой совокупность плоскостей скольжения и направлений скольжения в этих плоскостях. Как отмечено, например, в работе [8], для гранецентрированных кубических

монокристаллов скольжение дислокаций имеет место, в основном, в системе плоскостей с нормальными $\{111\}$ и в системе направлений $\langle 110 \rangle$, то есть в октаэдрических плоскостях и в направлениях вдоль ребер октаэдра (фиг.1 и 2), построенного, соответственно ориентации плоскостей монокристалла. Таким образом, для гранецентрированного кубического монокристалла имеется всего 12 систем скольжения, причем, как вытекает из предыдущего, системы скольжения не зависят от напряженного состояния монокристалла, а определяются лишь ориентацией его атомных плоскостей. Согласно принятым предпосылкам [5], скольжение дислокаций в некоторой системе скольжения зависит лишь от соответственного этой системе касательного напряжения и от истории его изменения во времени.



Фиг.1



Фиг.2

Соотношения между деформациями и напряжениями для гранецентрированного монокристалла при произвольном сложном напряженном состоянии запишутся так [5]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \left\{ \Phi \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y + (-1)^i \tau_{yz} + (-1)^j \tau_{zx}}{\sqrt{6}} \right] + \Phi \left[\frac{\sigma_x - \sigma_z + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j \tau_{yz}}{\sqrt{6}} \right] \right\} \quad (x, y, z) \quad (1.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \left\{ \Phi \left[\frac{\tau_{xy} + (-1)^i \tau_{zx} + (-1)^j (\sigma_y - \sigma_z)}{\sqrt{6}} \right] + \Phi \left[\frac{\tau_{xy} + (-1)^i \tau_{yz} + (-1)^j (\sigma_x - \sigma_z)}{\sqrt{6}} \right] \right\} \quad (x, y, z) \quad (1.2)$$

где суммирование производится по всем комбинациям i и j , принимающим значения 1 и 2, x, y и z совпадают с осями $[001]$, $[010]$ и $[100]$, соответственно. Φ - оператор по времени, определяющий скольжение дислокаций в любой системе скольжения (все системы скольжения адекватны), выражения для $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_x$ и γ_y могут быть получены из (1.1) и (1.2) путем последовательной перестановки индексов x, y, z .

Определение оператора Φ может быть осуществлено из экспериментов на растяжение образцов, продольная ось которых совпадает, например, с осью z или, что то же, $[100]$; деформационные свойства такого образца, согласно (1.1) соответствуют соотношению

$$\varepsilon_z(t) = \frac{8}{\sqrt{6}} \Phi \left[\frac{\sigma_z(t)}{\sqrt{6}} \right] \quad (1.3)$$

Естественно, в условиях нагружения, когда реологические свойства не проявляются, оператор Φ вырождается в коэффициент, описывающий упругие свойства материала, связанные со скольжением дислокаций. В случае, когда растягивающее напряжение имеет направление $[110]$, то деформация монокристалла в этом же направлении, согласно соотношениям (1.1) и (1.2), определяется по формуле [5].

$$\varepsilon_{[110]}(t) = \frac{4}{\sqrt{6}} \Phi \left[\frac{\sigma_{[110]}(t)}{\sqrt{6}} \right] \quad (1.4)$$

то есть деформационная податливость монокристалла в направлении $[100]$ ровно в два раза больше, чем в направлении $[110]$, что имело многократные подтверждения при проведении экспериментов на алюминиевых монокристаллах в условиях различных программ изменения осевого напряжения и температуры [6].

2. К проектированию изгибаемых и растянутых элементов

Вопрос оптимального проектирования изгибаемых и растянутых элементов сводится к выбору такой ориентации структуры, при которой наибольшее из касательных напряжений, возникающих в системах скольжения, является минимальным из всех ориентаций или же минимальной является потенциальная энергия деформации в наиболее нагруженной точке. Итак, положим, что ось ξ , вдоль которой действует нормальное напряжение σ_ξ , составляет углы α , β и δ соответственно с осями $[001]$, $[010]$ и $[100]$, при этом очевидно,

$$\sigma_x = \sigma_\xi \cos^2 \alpha, \quad \sigma_y = \sigma_\xi \cos^2 \beta, \quad \sigma_z = \sigma_\xi \cos^2 \delta \quad (2.1)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_\xi \cos \alpha \cos \beta, \quad \tau_{yz} = \sigma_\xi \cos \beta \cos \delta, \quad \tau_{zx} = \sigma_\xi \cos \delta \cos \alpha$$

При использовании равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \delta + \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \\ + \gamma_{yz} \cos \beta \cos \delta + \gamma_{zx} \cos \delta \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

из соотношений (1.1) и (1.2) получим следующее соотношение между ε_ξ и σ_ξ , определяющее анизотропию монокристалла:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \left\{ (\cos \alpha + (-1)^i \cos \beta)(\cos \alpha - (-1)^j \cos \beta + (-1)^k \cos \delta) \times \right. \\ \left. \times \Phi \left[\frac{\sigma_\xi(t)}{\sqrt{6}} (\cos \alpha + (-1)^i \cos \beta)(\cos \alpha - (-1)^j \cos \beta + (-1)^k \cos \delta) \right] + \right. \\ \left. + (\cos \beta + (-1)^l \cos \delta)(\cos \beta - (-1)^m \cos \delta + (-1)^n \cos \alpha) \times \right. \\ \left. \times \Phi \left[\frac{\sigma_\xi(t)}{\sqrt{6}} (\cos \beta + (-1)^l \cos \delta)(\cos \beta - (-1)^m \cos \delta + (-1)^n \cos \alpha) \right] + \right. \\ \left. + (\cos \delta + (-1)^o \cos \alpha)(\cos \delta - (-1)^p \cos \alpha + (-1)^q \cos \beta) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \Phi \left\{ \frac{\sigma_{\xi}(t)}{\sqrt{6}} (\cos\delta + (-1)'\cos\alpha)(\cos\delta - (-1)'\cos\alpha + (-1)'\cos\beta) \right\}$$

Формула (2.3) является основой для выбора ориентации осей кристалла в отношении к направлению нормального напряжения. Варьируя углы α , β и δ (при естественном ограничении $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta = 1$), можно изменять напряжения сдвига, соответствующие той или иной системе скольжения и численно равные выражениям в квадратных скобках (2.3), а также в некоторых случаях изменять количество систем скольжения, в которых скольжение происходит при действии σ_{ξ} . Например, принимая $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\delta = 0$, формула (2.3) вырождается в (1.3), что соответствует 8 системам скольжения, в каждой из которых действует касательное

напряжение $\frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{6}}$; принимая же $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\delta = 0$, из формулы (2.3) получим (1.4), что соответствует 4 системам скольжения, в

каждой из которых действует такое же касательное напряжение $\frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{6}}$;

отметим, что, как показывает анализ, наибольшее касательное напряжение из возникающих в системах скольжения может достигать

значения $\frac{\sigma_{\xi}}{2} (\cos\alpha = 0.90515, \cos\beta = \frac{1}{6}, \cos\delta = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta})$.

Принимая направление ξ , совпадающее с осью [111], получим, что напряжение сдвига в 6 системах скольжения достигает значения

$\frac{2\sigma_{\xi}}{3\sqrt{6}} = 0.27217\sigma_{\xi}$, в остальных же - напряжения сдвига не возникают, этот случай является самым благоприятным, отметим, что он соответствует минимальной энергии деформации.

Таким образом, при варьировании ориентации ξ наибольшие касательные напряжения в системах скольжения могут изменяться в пределах от $0.27217\sigma_{\xi}$ до $0.5\sigma_{\xi}$, при этом, в случае ориентации [111] они на 45.5% ниже возникающих в наиболее неблагоприятном случае ($\tau_{\max} = 0.5\sigma_{\xi}$).

Естественно, здесь возникает вопрос о том, насколько точно должна быть обеспечена ориентация [111] и как неточность ориентации влияет на наибольшие напряжения сдвига в системах скольжения. Простейшие расчеты показывают, что если имеется место отклонения в ориентации кристаллографических осей в пределах 1° , то максимальное напряжение сдвига в системах скольжения может увеличиться на 4.92%

если же в пределах 2° , то увеличение составит 9.89% от значения $\frac{2\sigma_{\xi}}{3\sqrt{6}}$.

Это предопределяет требования к точности ориентации [111] в отношении к предельной оси.

Этот эффект можно считать незначительным, так как при ориентации [111] в отношении к предельной оси, увеличение напряжения сдвига в системах скольжения составляет 4.92% от значения $\frac{2\sigma_{\xi}}{3\sqrt{6}}$.

Это предопределяет требования к точности ориентации [111] в отношении к предельной оси.

3. Оптимальное проектирование труб с внутренним давлением

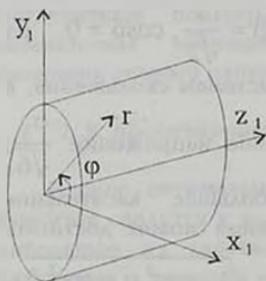
Рассматриваются круглые тонкостенные цилиндрические трубы, подверженные действию внутреннего давления при наличии и при отсутствии дна; исследуются три ориентации продольной оси трубы [100], [110] и [111], не приводящие к скосу трубы.

3.1 Трубы с днами

Независимо от конструкции закреплений труб с днами, здесь предполагается, что продольная осевая нагрузка передается трубе, при

этом $\sigma_\varphi = \frac{qR}{\delta}$, $\sigma_z = \frac{qR}{2\delta}$, $\sigma_r = 0$ (δ - толщина, q - внутреннее давление,

R - радиус трубы; r, φ, z_1 - оси цилиндрической системы координат (фиг.3)). Соответственно, системе координат (x_1, y_1, z_1) будем иметь



Фиг.3

$$\sigma_{x_1} = \frac{qR}{\delta} \sin^2 \varphi, \quad \sigma_{y_1} = \frac{qR}{\delta} \cos^2 \varphi,$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \frac{qR}{\delta} \sin \varphi \cos \varphi, \quad \sigma_{z_1} = \frac{qR}{2\delta}, \quad \tau_{x_1 z_1} = \tau_{y_1 z_1} = 0$$

а) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [100]. Принимая, что оси x_1, y_1 и z_1 совпадают соответственно с осями x, y и z , соотношения (1.1) и (1.2) перепишем так:

$$\varepsilon_x = -\frac{4}{\sqrt{6}} \Phi \left[2A \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] - \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \Phi \left[A \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] - \Phi \left[A \frac{\cos 2\varphi - \sin 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] \right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{4}{\sqrt{6}} \Phi \left[2A \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] + \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \Phi \left[A \frac{\cos 2\varphi - \sin 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] + \Phi \left[A \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] \right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (-\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \right] + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (-\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + \right. \\ \left. + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \right] + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (\cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] \right\} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{4}{\sqrt{6}} \Phi \left[A \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] + \frac{4}{\sqrt{6}} \Phi \left[A \frac{\sin 2\varphi - \cos 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] \quad (3.2)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} ((-1)^i \sin 2\varphi + (-1)^j \cos 2\varphi) \right] + \frac{2}{\sqrt{6}} \sum_i^{1,2} \Phi \left[\frac{2A}{\sqrt{6}} (-1)^i \cos 2\varphi \right] = 0$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j}^{1,2} \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} ((-1)^i \sin 2\varphi + (-1)^j \cos 2\varphi) \right] + \frac{2}{\sqrt{6}} \sum_i^{1,2} \Phi \left[\frac{2A}{\sqrt{6}} (-1)^i \cos 2\varphi \right] = 0$$

где $A = \frac{qR}{2\delta}$. Деформации $\varepsilon_z, \gamma_{yz}$ и γ_{zx} равны нулю, вследствие

очевидного тождества $\Phi(-f(t)) = -\Phi(f(t))$.

Наибольшее касательное напряжение, которое возникает в какой-либо из систем скольжения, как это вытекает из (3.2), равно

$$\frac{2A}{\sqrt{6}} \approx 0.8165A.$$

Положим, что деформация сдвига, как результат скольжения в некоторой системе скольжения, определяется некоторым упругим модулем G_0 : $\Phi(x) = \frac{x}{G_0}$. При этом получим следующее выражение для

энергии $\Pi(\varphi)$ деформаций, связанных со скольжением во всех системах скольжения:

$$\Pi(\varphi) = \frac{2}{3} \frac{A^2}{G_0} (2 + \cos 4\varphi)$$

Усредненное и наибольшее значения Π определяются так:

$$\Pi_{\text{уср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi) d\varphi = \frac{4}{3} \frac{A^2}{G_0} \approx 1.3333 \frac{A^2}{G_0}$$

$$\Pi_{\text{max}} = 2 \frac{A^2}{G_0} \quad (3.3)$$

Если имеет место ползучесть, которая при действии постоянного напряжения σ в направлении $[100]$ описывается формулой

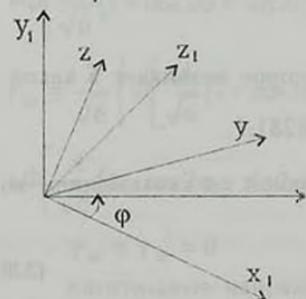
$$\varepsilon_{[100]} = \sigma^m F(t) \quad (3.4)$$

то, согласно (1.3), имеем $\Phi(x) = \frac{(\sqrt{6})^{m+1}}{8} x^m F(t)$.

Для энергии деформаций ползучести W получим нижеследующую формулу:

$$W = \frac{A^{m+1}}{2} F(t) \left[|2 \cos 2\varphi|^{m+1} + |\cos 2\varphi + \sin 2\varphi|^{m+1} + |\cos 2\varphi - \sin 2\varphi|^{m+1} \right] \quad (3.5)$$

б) *Ориентация продольной оси трубы вдоль оси $[110]$.* Положим, что кристаллические оси x , y и z ориентированы следующим образом: ось x ($[001]$) перпендикулярна продольной оси трубы z_1 и составляет угол φ с осью x_1 (фиг.4), а оси y ($[010]$) и z ($[100]$) составляют угол 45° с осью z_1 .



Фиг.4

Согласно описываемым здесь выкладкам и выражениям, аналогичным (3.1) и (3.2), получим, что наибольшее касательное напряжение, которое возникает в какой-либо системе скольжения, равно

$$\max_{\varphi} \left[\left(2 \cos 2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \right) \frac{A}{\sqrt{6}} \right] \approx 0.86602A$$

Для энергии деформации, связанной с упругим скольжением во всех системах скольжения, получим

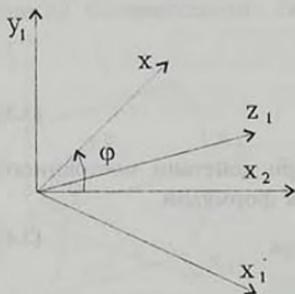
$$\Pi(\varphi) = \frac{A^2}{6G_0} (7 + 3 \cos 4\varphi)$$

$$\Pi_{\text{уср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi) d\varphi = \frac{7}{6} \frac{A^2}{G_0} = 1.1666 \frac{A^2}{G_0} \quad (3.6)$$

$$\Pi_{\text{max}} = \frac{5}{3} \frac{A^2}{G_0} \approx 1.6666 \frac{A^2}{G_0}$$

В случае ползучести, протекающей по степенному закону (3.4), для энергии деформации ползучести при постоянной нагрузке будем иметь

$$W = \frac{A^{m+1}}{4} I^2(t) \left[\left| 2 \cos 2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \left| 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \right. \\ \left. + \left| \cos 2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \left| \cos 2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \left| \sqrt{2} \sin 2\varphi \right|^{m+1} \right] \quad (3.7)$$



Фиг.5

в) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [111].

Принимая, что ось z_1 (фиг.5) совпадает с осью [111], получим, что она равно наклонена к осям x , y и z . Положим, что ось x составляет с плоскостью, на которой расположены оси x_1 и z_1 , некоторый угол φ , при этом получим нижеследующие значения для косинусов углов между осями x , y , z и x_1 , y_1 , z_1 :

$$\cos(x_1, x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \varphi, \quad \cos(x_1, y) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos(x_1, z) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right), \quad \cos(y_1, x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \varphi$$

$$\cos(y_1, y) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad \cos(y_1, z) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos(z_1, x) = \cos(z_1, y) = \cos(z_1, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Наибольшее касательное напряжение, которое возникает в какой-либо из систем скольжения, равно $\frac{4}{3\sqrt{2}} A \approx 0.94281 A$.

Для упругой энергии деформации, связанной со скольжением во всех системах скольжения, получим

$$\Pi(\varphi) \cong \frac{20}{9} \frac{A^2}{G_0} \approx 2.2222 \frac{A^2}{G_0} \quad (3.8)$$

В случае же проявления ползучести, протекающей по степенному закону (3.4), для энергии деформации ползучести будем иметь следующее выражение:

$$W = \frac{A^{m+1} F(t)}{24} 6z^m \left[2|4 \cos 2\varphi|^{m-1} + |2 \cos 2\varphi - 2\sqrt{3} \sin 2\varphi|^{m-1} + \right. \\ \left. + 2|2 \cos 2\varphi + 2\sqrt{3} \sin 2\varphi|^{m-1} + |4\sqrt{3} \sin 2\varphi|^{m-1} + \right. \\ \left. + |6 \cos 2\varphi - 2\sqrt{3} \sin 2\varphi|^{m+1} + |6 \cos 2\varphi + 2\sqrt{3} \sin 2\varphi|^{m+1} \right] \quad (3.9)$$

3.2 Трубы без дилт

Принимается, что продольная осевая сила трубе не передается

$$\sigma_\varphi = \frac{qR}{\delta} \equiv 2A, \quad \sigma_{x_1} = \sigma_r = 0 \quad (\text{фиг. 3}), \quad \text{то есть} \\ \sigma_{x_2} = 2A \sin^2 \varphi, \quad \sigma_{y_2} = 2A \cos^2 \varphi, \quad \tau_{x_2 y_2} = 2A \sin \varphi \cos \varphi \quad (3.10) \\ \sigma_{z_1} = \tau_{x_1 z_1} = \tau_{y_1 z_1} = 0$$

а) *Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [100].*

Принимая, что оси x_1, y_1 и z_1 совпадают соответственно с кристаллическими осями x, y и z , соотношения (1.1) и (1.2) перепишем так:

$$\varepsilon_x = -\frac{4}{\sqrt{6}} \Phi \left[2A \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] + \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 - \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + \right. \\ \left. + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 - \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \right] \right\} \\ \varepsilon_y = \frac{4}{\sqrt{6}} \Phi \left[2A \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{6}} \right] + \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + \right. \\ \left. + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \right] \right\} \\ \varepsilon_z = -\frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 - \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 - \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \right] + \right. \\ \left. + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 - \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \right] \right\} \quad (3.11) \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] - \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \right] + \right. \\ \left. + \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 - \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] - \Phi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 - \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \right] \right\} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Касательные напряжения, соответствующие системам скольжения, равны выражениям в квадратных скобках (3.15), наибольшее из них равно

$$\max_\varphi \left[\frac{A}{\sqrt{6}} (1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) \right] = \frac{A(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{6}} \approx 0.98560A.$$

что на 20.71% превышает соответствующее касательное напряжение для труб с дилатантами.

Для энергии упругой деформации, связанной со скольжением во всех системах скольжения, ее усредненного и наибольшего значения будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) &= \frac{2}{3} \frac{A^2}{G_0} (3 + \cos 4\varphi) \\ \Pi_{\text{уср}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Pi(\varphi) d\varphi = 2 \frac{A^2}{G_0} \\ \Pi_{\text{max}} &= \frac{8}{3} \frac{A^2}{G_0} \approx 2.6667 \frac{A^2}{G_0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

В случае ползучести, при действии постоянного напряжения σ в направлении $[100]$ описывается формулой (3.4), для энергии деформации ползучести будем иметь

$$\begin{aligned} W &= \frac{A^{m+1}}{4} F(t) \left[2|2 \cos 2\varphi|^{m+1} + |1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi|^{m+1} + \right. \\ &+ |1 - \cos 2\varphi + \sin 2\varphi|^{m+1} + |1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi|^{m+1} + |1 - \cos 2\varphi - \sin 2\varphi|^{m+1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

б) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси $[110]$.

Для напряжений, соответствующих кристаллическим осям (фиг. 4) будем иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A(1 - \cos 2\varphi), \quad \sigma_y = \sigma_z = -\tau_{yz} = \frac{A}{2} (1 + \cos 2\varphi) \\ \tau_{xy} &= -\tau_{xz} = -\frac{\sqrt{2}}{2} A \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (3.14)$$

Наибольшее касательное напряжение, возникающее в системе скольжения, достигается при $\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$ и равно

$$\tau_{\text{max}} = \max_{\varphi} \left[\frac{A}{\sqrt{6}} \left(1 + \cos 2\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\varphi \right) \right] \approx 0.90825 A$$

При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) &= \frac{A^2}{6G_0} (9 + 3 \cos 4\varphi - 4 \cos 2\varphi) \\ \Pi_{\text{уср}} &= \frac{3}{2} \frac{A^2}{G_0}, \quad \Pi_{\text{max}} = \frac{8}{3} \frac{A^2}{G_0} \end{aligned} \quad (3.15)$$

В случае ползучести, описываемой (3.4), для энергии деформации будем иметь

$$W = \frac{A^{m+1}}{4} F(t) \left[\left| 2 \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \left| 2 \cos 2\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \right.$$

$$+ \left| 1 - \cos 2\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \left| 1 - \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \left| \sqrt{2} \sin 2\varphi \right|^{m+1} \quad (3.16)$$

в) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [111].

Соответственно кристаллическим осям x , y и z (фиг.5), аналогично (3.1), запишем следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{3} A(1 - \cos 2\varphi), \quad \sigma_y = \frac{2}{3} A\left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi\right) \\ \sigma_z &= \frac{2}{3} A\left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi\right), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{3} A(-1 + \cos 2\varphi + \sqrt{3} \sin 2\varphi) \\ \tau_{yz} &= -\frac{1}{3} A(1 + \cos 2\varphi), \quad \tau_{zx} = -\frac{1}{3} A(1 - \cos 2\varphi + \sqrt{3} \sin 2\varphi) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Наибольшее касательное напряжение, возникающее в системах скольжения, равно $\tau_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{3} A = 0.9428 A$.

При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) &= \frac{A^2}{9G_0} (12 - 2\sqrt{3} \sin 2\varphi + \sqrt{3} \sin 4\varphi) \\ \Pi_{\text{уср}} &= \frac{4}{3} \frac{A^2}{G_0} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\Pi_{\max} = \Pi\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{11}{6} \frac{A^2}{G_0}$$

В случае ползучести, описываемой (3.4), для энергии деформации будем иметь

$$\begin{aligned} W &= \frac{A^{m+1}}{8} F(t) \left[2 \left| \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cos 2\varphi \right|^{m+1} + \left| 2 \cos 2\varphi - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \right. \\ &+ \left| 2 \cos 2\varphi + \frac{2\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + \left. 4 \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right|^{m+1} \right. \\ &+ \left. 2 \left| \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cos 2\varphi + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right|^{m+1} + 2 \left| \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cos 2\varphi - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right|^{m+1} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ниже приводится сводная таблица расчетных данных для труб с ориентацией продольной оси [100], [110] и [111].

Из данных таблицы можно заключить, что из условия наибольших касательных напряжений в системах скольжения более благоприятными являются трубы с днищами, причем наибольшая несущая способность достигается при ориентации продольной оси трубы в направлении [100]; для труб без днищ наиболее благоприятной является ориентация [110]. Из энергетических же условий для труб с днищами благоприятной ориентацией продольной оси является [110], без днищ же — [111].

Ориентация продольной оси	Наибольшие касательные напряжения		Максимальная упругая энергия $(\times \frac{G_0}{A^2})$		Усредненная упругая энергия $(\times \frac{G_0}{A^2})$	
	с дни- щами	без днищ	с дни- щами	без днищ	с дни- щами	без днищ
100	0.8165A	0.9856A	2.000	2.667	1.333	2.000
110	0.8543A	0.9082A	1.666	2.667	1.166	1.500
111	0.9428A	0.9428A	2.222	1.833	2.222	1.333

ЛИТЕРАТУРА

1. Металлические монокристаллы. Получение и исследование свойств. — М.: Наука, 1976.
2. Ползучесть и возврат. — М.: Metallurgizdat, 1961.
3. Keown S.R. Microstructural changes occurring during the creep deformation of a simple austenitic steel at 600°C. "Creep strength steel and high-temp. alloys. — Proc. Meet. Univ. Sheffield. 1972" London. 1974.
4. Ishihara T. Strength of metal matrix composites for supersonic aeroplane engines. Composites. Fracture mechanics and technology. — Russian Composite Society. Chernogolovka. 1992.
5. Симонян А.М., Симонян Н.М. К вопросу о реологии монокристаллов. — Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1985, т. 38, №4, с.38-48.
6. Симонян А.М. Исследования ползучести алюминидовых монокристаллов. — Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, №6, с.27-40.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. — М.: Наука, 1967.
8. Чалмерс Б. Физическое металловедение. — М.: Metallurgizdat, 1963.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
17.08.1995