ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 539.3:62.52

ВОЗВРАЩЕНИЕ К ВОПРОСУ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГОЙ БАЛКИ

Мовсисян Л.А., Габриелян М.С.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Մ.Ս. Գաբրիելյան

Վերադարձ առաձգական համակարգերի շարժման ղեկավարման հարցին

Դիտարկվում է հեծանի շարժման ղեկավարման խնդիրը երկու դրվածքով՝ երբ պահանջվում է ժամանակի որոշակի մոմենտին հեծանի որևէ կետ բերել տրված դիրքին և երբ կարճյալ ժամանակի որոշակի մոմենտին հեծանի բոլոր կետերը և նրանց արագությունները բերվեն տրված արժեքներին, ըստ որում օպտիմալ ձևով: Եթե վերջին խնդիրը լուծվում է մոմենտների պրոբլեմի միջոցով միայն, ապա առաջին դրվածքի դեպքում անհրաժեշտ է լինում միաժամանակյա մինիմացնել նաև ծախսված աշխատանքը:

L.A. Movsisian, M.S. Gabrielian

The return to control problems for motion of elastic systems

В работе [1] была изучена задача оптимального управления движением термоупругой пластинки (связанная задача). В качестве управляющих воздействий помимо силовых факторов рассматривалась также и температура. Так как там ставился вопрос приведения системы и ее скорость в определенные моменты времени в определенные состояния (вся система), вариационная задача решалась с помощью проблемы моментов. На практике возможны случаи, когда есть необходимость привести какую-нибудь точку объекта в данное положение. В настоящей статье исследуется этот вопрос. В отличие от [1], здесь уже помимо квадратичного функционала минимизируется также истраченная силами работа. Ради краткости изложение ведется для одномерных систем. Из хода решения видно будет, что решение двумерных задач не вносит никаких принципиальных отличий по сравнению с одномерными. Чтобы показать разницу между двумя постановками, в кратком виде приводится решение задачи, когда вся система приводится к заданным положению и скорости.

1. Возьмем систему уравнений

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \omega_m^2 f_m = \varphi_m(t), \qquad m = 1, 2 \ldots \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$f_m = f_m^{(0)}, \quad \frac{df_m}{dt} = f_m^{(1)} \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{1.2}$$

Как известно, к такой системе приводятся, например, уравнения продольных, сдвиговых и поперечных вынужденных колебаний стержней.

Для определенности в дальнейшем будем рассматривать изгибные колебания.

Если прогиб балки обозначить через $w(x,t)$, интенсивность действующей нагрузки $\phi(x,t)$ и начальные условия – $w|_{t=0} = w_1(x)$ и $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_2(x)$, то разлагая w в ряд по фундаментальным функциям $X_m(x)$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) X_m(x) \tag{1.3}$$

получим (1.1) с

$$\omega_m^2 = \frac{EJ}{\rho F}\lambda_m^4, \quad \varphi_m = \frac{1}{\rho F Q_m}\int_0^l \Phi(x,t)X_m(x)dx$$

$$f_m^{(0)} = \frac{1}{Q_m}\int_0^l w_1(x)X_m(x)dx, \quad f_m^{(1)} = \frac{1}{Q_m}\int_0^l w_2(x)X_m(x)dx$$

$$M_m = \int_0^l X_m^2(x)dx$$

где λ_m – собственные значения соответсвующей однородной задачи.

Вопрос ставится следующим образом: в определенный момент времени $t = T$ определенную точку балки $x = x_1$ привести в заданное положение –

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(T)X_m(x_1) = \overline{w} \tag{1.4}$$

при этом истрачивая минимальную работу. Согласно системе (1.1), работа управляющей силы за время $0 \le t \le T$ будет

$$A = \int_0^T\int_0^l \Phi(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}dxdt \tag{1.5}$$

Согласно (1.3) и формуле Коши, для решения (1.1) выражение (1.5) получит вид

$$A = \rho F\sum_{m=1}^{\infty}\left\{-f_m^{(0)}\omega_m Y_m(T) + f_m^{(1)}Z_m(T) + \frac{1}{2}\left[Z_m^2(T) + Y_m^2(T)\right]\right\} \tag{1.6}$$

где введены обозначения

$$Y_m(t) = \int_0^t \varphi_m(\tau)\sin\omega_m\tau d\tau, \quad Z_m(t) = \int_0^t \varphi_m(\tau)\cos\omega_m\tau d\tau \tag{1.7}$$

В новых обозначениях условие (1.4) дает

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m(x_1)\left\{f_m^{(0)}\cos\omega_m T + \frac{f_m^{(1)}}{\omega_m}\sin\omega_m T + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_m}\left[Z_m(T)\sin\omega_m T - Y_m(T)\cos\omega_m T\right]\right\} = \overline{w} \tag{1.8}$$

Так как (1.6) – вогнутая функция от $Y_m(T)$ и $Z_m(T)$, а выражение (1.8) линейно относительно этих же переменных, то минимум (1.6) при (1.8) достижим и его можно найти при помощи неопределенных множителей Лагранжа.

После минимизации получим

$$\begin{aligned} Y_m(T) &= f_m^{(0)}\omega_m + \frac{\lambda}{\omega_m}\cos\omega_m T \\ Z_m(T) &= -f_m^{(1)} - \frac{\lambda}{\omega_m}\sin\omega_m T \end{aligned} \tag{1.9}$$

где множитель λ определяется по формуле

$$\lambda = -\overline{w}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k(x_1)}{\omega_k^2}\right]^{-1} \tag{1.10}$$

Так как ряд в (1.10) сходится абсолютно, то λ – конечное число. Согласно (1.7), (1.9) и (1.10) имеем

$$A_m(T) = Y_m(T) = f_m^{(0)}\omega_m - \frac{\overline{w}}{\omega_m}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k(x_1)}{\omega_k^2}\right]^{-1}\cos\omega_m T$$

$$B_m(T) = Z_m(T) = -f_m^{(1)} + \frac{\overline{w}}{\omega_m}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k(x_1)}{\omega_k^2}\right]^{-1}\sin\omega_m T \qquad (1.11)$$

Отметим, что $A_m(T)$ и $B_m(T)$ имеют порядок $\sim 0(m^{-2})$.

Как видно из последних формул, из условия минимума истраченной энергии управляющее воздействие $\varphi_m(t)$ $(\Phi(x,t))$ не определяется однозначным образом и есть необходимость дополнительных условий на управляющее воздействие, то есть, затрачивая минимум энергии, систему можно привести в указанное положение различными способами.

Для однозначного определения управляющей функции $\Phi(x,t)$ целесообразно минимизировать также функционал

$$U = \int_0^T\int_0^l \Phi^2(x,t)dxdt \qquad (1.12)$$

На основании ортогональности $X_m(x)$ имеем

$$U = c\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T \varphi_m^2(t)dt, \qquad (c = \text{const} > 0) \qquad (1.13)$$

Таким образом, задача сводится к минимизации функционала (1.13) при условии (1.11). Так как слагаемые в (1.13) не зависят друг от друга, то минимум суммы получится при минимуме каждого слагаемого. Таким образом, вопрос сводится к следующей задаче: минимизировать функционал

$$J_m = \int_0^T \varphi_m^2(t)dt \qquad (1.14)$$

при условии (1.11).

Поставленную задачу оптимального управления целесообразно решить при помощи проблемы моментов [2]. Для этого составим линейную операцию

$$\int_0^T \varphi_m(t)h_{mp}(t)dt, \quad \text{где} \quad h_{mp}(t) = p_m^{(1)}\cos\omega_m t + p_m^{(2)}\sin\omega_m t$$

и потребуем, чтобы

$$p_m^{(1)}B_m + p_m^{(2)}A_m = 1 \qquad (1.15)$$

Тогда, норма основного пространства ищется в виде

$$\rho(h_m) = \left[\int_0^T h_m^2(t)dt\right]^{1/2} \qquad (1.16)$$

Минимальное значение нормы $\rho(h)$ над подпространством $\{h_p(t)\}$ будет

$$\rho_0^2 = \min_{p_m^{(1)}B_m + p_m^{(2)}A_m = 1}\int_0^T h_{mp}^2(t)dt \qquad (1.17)$$

Совершая необходимые действия, для ρ_0^2 получим

$$\rho_0^2 = \frac{a_m b_m - c_m^2}{2M_m} \tag{1.18}$$

где

$$a_m = T + \frac{1}{2\omega_m}\sin 2\omega_m T, \quad b_m = T - \frac{1}{2\omega_m}\sin 2\omega_m T$$

$$c_m = \frac{1}{\omega_m}\sin^2 \omega_m T, \quad Q_m = a_m A_m^2 - 2c_m A_m B_m + b_m B_m^2 \tag{1.19}$$

Из (1.18) и (1.19) следует, что $\rho_0^2 > 0$.

Следовательно, для оптимального управляющего воздействия будем иметь

$$\varphi_m^{(0)} = \frac{2}{a_m b_m - c_m^2}\left[\left(b_m B_m - c_m A_m\right)\cos\omega_m t + \left(A_m a_m - B_m c_m\right)\sin\omega_m t\right] \tag{1.20}$$

Таким образом, получили решение поставленной задачи и так как $\varphi_m^{(0)}$ имеют такой же порядок, что и A_m и B_m, следовательно ряд (1.13) абсолютно сходится, то есть функционал, характеризующий процесс управления, — конечная величина.

Замечание 1. Если колебание осуществляется помимо начальных условий (1.2) и силой, то уже под $\varphi_m^{(0)}$ в (1.20) следует понимать сумму, состоящую как из искомой (обеспечивает оптимальное управление) и известной частей. К этим задачам относятся также случаи, когда заданы законы движения опор балки.

2. Если же вопрос поставить следующим образом: чтобы в момент $t = T$ прогиб и скорость принимали заданные значения

$$w(x,t) = w_3(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m X_m(x)$$

$$\frac{\partial w(x,T)}{\partial t} = w_4(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m X_m(x) \tag{2.1}$$

то функции $Z_m(T)$ и $Y_m(T)$ из (1.7) определятся единственным образом

$$A_m^{(1)} = Y_m(T) = \beta_m \sin\omega_m T - \alpha_m\omega_m \cos\omega_m T + f_m^{(0)}\omega_m$$

$$B_m^{(1)} = Z_m(T) = \alpha_m\omega_m \sin\omega_m T + \beta_m \cos\omega_m T - f_m^{(1)} \tag{2.2}$$

При настоящей постановке A из (1.5) будет постоянной величиной (не варьируется). А минимизация (1.13) при (2.2) дает формулы (1.20), где уже A_m и B_m заменены на $A_m^{(1)}, B_m^{(1)}$, то есть

$$\varphi_m^{(0)} = \frac{2}{a_m b_m - c_m^2}\left[\left(b_m B_m^{(1)} - c_m A_m^{(1)}\right)\cos\omega_m t + \left(a_m A_m^{(1)} - c_m B_m^{(1)}\right)\sin\omega_m t\right] \tag{2.3}$$

Вопрос сходимости решается совершенно аналогичным образом, как в п.1

3. В качестве примера возьмем шарнирно опертую балку, которой в момент $t = 0$ сообщается прогиб по одной полуволне —

$$f_1^{(0)} = f^0, \ f_m^{(0)} = f_m^{(1)} = 0, \ f_1^{(1)} = 0, \ m = 2,3,\ldots \tag{3.1}$$

Фундаментальные функции — $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$.

Частоты определятся

$$\omega_m = \alpha m^2, \quad \alpha = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}\frac{\pi^2}{l^2}, \quad m = 1,2,\ldots \tag{3.2}$$

В отсутствие управляющих сил в момент $t = T = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ балка будет находиться в первоначальном положении. Теперь осуществим управления в обеих постановках.

а) В первой постановке потребуем, чтобы в момент $t = T$ точка $x = l/2$ находилась в противоположном положении –

$$w\left(\frac{l}{2}, T\right) = -f^0 \tag{3.3}$$

Произведя необходимые вычисления для управляющей функции, находим

$$\Phi = f_0\beta\left[\sin\omega_1 t\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{G}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_m t}{m^2}\sin\frac{m\pi x}{l}\right] \tag{3.4}$$

где $\beta = EJ\pi^3/l^4$, а G – постоянное Каталана

$$G = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

б) Теперь при второй постановке –

$$w_3(x) = -f^0\sin\frac{\pi x}{l}, \quad w_4 = 0$$

для управляющей функции находим

$$\Phi = 2\beta f_0\sin\omega_1 t\sin\frac{\pi x}{l} \tag{3.5}$$

Интересно отметить, что если бы потребовали, чтобы в момент $T = \dfrac{\pi}{\omega_1}$ срединная точка балки находилась в равновесном положении $\left(w\left(\dfrac{l}{2}, T\right) = 0\right)$ при первой постановке и $w_3(x) = w_4(x) = 0$ при втором, то для управляющих функций получили бы одинаковые выражения.

Замечание 2. По небрежности авторов [1], в качестве управляющих функций брались и граничные значения температуры – $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$, что приводит к расходящемуся ряду. Их следует брать как заданные. Коэффициенты β, γ и ε в (2.1) работы [1] – постоянные, что и предполагалось с самого начала. Но почему-то в тексте после формулы (2.20) им приписывается порядок. Ряды сходятся и при их постоянном значении.

Внимание авторов к этим фактам обратил Э.Х. Григорян, когда уже была готова первая часть настоящей статьи, за что авторы приносят ему благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы – Изв. НАН Армении, Механика, 1995, т.48, №3, с.15-22.

2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. 475с.

Институт механики НАН Армении
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 2.09.1996