

УДК 517.9:532

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ  
 НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В НЕСИММЕТРИЧНОЙ  
 ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Багдаев А.Г., Петросян Л.Г., Багдасарян Ш.А.

Բվագրվածնորոմատիկ ոչ գծային ալիքների տարածումը ասիմետրիկ էլեկտրահաղորդիչ գազիեղուկ լուծույթում

Ա.Գ. Բագդև, Լ.Գ. Պետրոսյան, Շ.Ա. Բաղդասարյան

Այստեղից են մոդուլյացիայի հավասարումները: Առանցքասիմետրիկ խնդրում ստիպւմ է պահանջ ցնդ փնջերի լուծումը: Փնջի լայնության համար ստացվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում, որը լուծվում է րվային մեթոդով:

A.G. Bagdov, L.G. Petrosian, Sh. A. Bagdasarian

The Propagation of Quasimonochromatic Non-Linear Waves In Non-Symmetrical Electroconducting Gasfluid Mixture

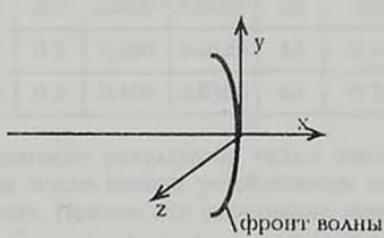
Получены уравнения модуляции для несимметричной электропроводящей газожидкостной смеси и дано решение узких пучков в осесимметричной задаче. Для безразмерной ширины пучка получается обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого дается в численном виде.

1. Для квазимонохроматической нелинейной волны, близкой к плоской распространяющейся в несимметричной электропроводящей однородной газожидкостной смеси, в уравнении коротких волн [1] можно считать лучевое решение  $\Phi = \text{const}$  и записать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} H_1 \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) =$$

$$= - \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + G \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} \right) \quad (1.1)$$

где учтено, что  $\alpha_1 \approx \alpha_3 \approx 0$  и  $\alpha_1 \approx \frac{1}{H_1}$ .



фиг. 1

Здесь  $u$  - возмущенная малая скорость частицы,  $t$  - время,  $\tau = \tau_1(x_k) - t$  - эйконал,

$$H_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$$

- нормальная скорость невозмущенной волны [2],  $\alpha_k = \partial \tau / \partial x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

$E$  - коэффициент дисперсии, зависящий от радиуса пузырька и инерции вращения частиц,

$D$  - коэффициент диссипации классической ньютоновской жидкости,  $G$  - коэффициент диссипации, учитывающий несимметричность жидкости (обусловлен моментной вязкостью  $c_s$  и  $c_d$  [3]),  $\Gamma$  - коэффициент нелинейности,  $y, z$  - координаты, отсчитываемые по касательной к волне невозмущенной

задачи (фиг.1),  $x$  направлена по оси пучка.

В случае, когда начальное магнитное поле направлено по оси пучка ( $x$ ), как следует из [4], можно считать

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2}$$

Выбирая ось  $y$  в качестве радиальной координаты, можно получить из (1.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} H_1 L(u) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + G \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} \right) \quad (1.2)$$

где  $L(u) = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ .

Коэффициенты в уравнении (1.2)  $\Gamma, D, E, G$  для несимметричной электропроводящей жидкости с пузырьками газа конкретизированы в работе [4] и имеют вид

$$\Gamma = -\alpha^n \frac{c^2 - a^2}{a_{*0}^2 + a_1^2 - 2c^2} + \frac{3}{2} \frac{a_{*0}^2 - c^2}{a_{*0}^2 + a_1^2 - 2c^2} \quad (1.3)$$

$$D = -\frac{1}{H_1} M \left\{ \frac{4}{3} \frac{\mu}{p_g} c a_{*0}^2 + (\mu_0 + 2\mu) \frac{c}{\rho} \left( c^2 - \frac{\mu_e}{\rho} H_x^2 \right) + \frac{\mu \mu_e (c^2 - a_{*0}^2)}{\rho^2 c} H_x^2 + \nu_H c (c^2 - a_{*0}^2) \right\} \quad (1.4)$$

$$E = \frac{1}{H_1^2} M \left[ \frac{\rho_f R^2 c a_{*0}^2}{3 p_g} \left( c^2 - \frac{\mu_e}{\rho} H_x^2 \right) + \frac{\mu_e I (c^2 - a_{*0}^2)}{4 \rho} H_x^2 \right] \quad (1.5)$$

$$G = \frac{1}{H_1^3} M \frac{\mu_e (c_s + c_d) (c^2 - a_{*0}^2)}{4 \rho^2 c} H_x^2 \quad (1.6)$$

где

$$M = \frac{1}{2c [2c^2 - (a_{*0}^2 + a_1^2)]} \quad (1.7)$$

Здесь  $\alpha^0 = 1/\beta_0$ ,  $\beta_n$  - объем газа в единице объема смеси,  $c$  - нормальная скорость невозмущенной волны, относительно частиц,

$a_1^2 = \frac{\mu_e}{\rho} H_0^2$  - квадрат скорости Альфвена,  $H_0$  - начальное магнитное

поле,  $a_{*0}$  - невозмущенная скорость звука в газожидкостной смеси,  $\mu$  - динамическая ньютоновская вязкость,  $p_g$  - давление в газе,  $\mu_0$  - объемная вязкость,  $\rho$  - массовая плотность смеси,  $\mu_e$  - магнитная постоянная,  $H_x$  - проекция вектора напряженности магнитного поля на ось  $x$ ,  $\nu_H = 1/\sigma \mu_e$  - коэффициент магнитной вязкости,  $\sigma$  - электропроводность среды,  $\rho_f$  - плотность жидкости,  $I$  - скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы [3],  $c_s$  и  $c_d$  - динамические моментные вязкости [3].

В случае, когда среда покоится впереди волны  $V_n = 0$ , тогда

$$H_1 = c.$$

Для однородной среды в задаче стационарной дифракции для квазимонохроматической волны, уравнение которой в главных порядках имеет вид  $\tau = 0$ .

$$\tau = \tau_1(x_1) - t, \quad \tau_1 = \frac{x}{H_1}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau_1}$$

2. Для медленно меняющихся амплитуд и фаз решение уравнения (1.2) можно искать в виде

$$u = U_0 + \frac{1}{2} U_1 \exp(i\alpha\tau - i\omega t - \nu\alpha^2 t) + \frac{1}{2} U_2 \exp(2i\alpha\tau - 2i\omega t - 2\nu\alpha^2 t) + \text{к.с.} \quad (2.1)$$

где  $\alpha$  - основная частота волны,  $\nu$  - коэффициент затухания,  $U_0, U_1, U_2$  - медленно меняющиеся амплитуды, к.с. - комплексно сопряженные функции,  $\omega$  - модуляционная частота.

Подставляя значение  $u$  из (2.1) в уравнение (1.2) и приравнявая слагаемые с нулевой, первой и второй гармониками, получим линейное дисперсионное соотношение и коэффициент затухания

$$\omega = -\frac{1}{H_1} E\alpha^3 \quad (2.2)$$

$$\nu = -\frac{1}{H_1} D + \frac{1}{H_1} G\alpha^2 \quad (2.3)$$

Уравнения для  $U_0, U_1$  и  $U_2$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} L(U_0) = -\frac{1}{H_1} \left[ \Gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \left( U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{4} \Gamma \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_1 \bar{U}_1) \times \right. \\ \left. \times \exp(-2\nu\alpha^2 t) + D \frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} + E \frac{\partial^4 U_0}{\partial \tau^4} + G \frac{\partial^5 U_0}{\partial \tau^5} \right] \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial U_1}{\partial \tau} (i\omega + \nu\alpha^2) + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} + \omega\alpha U_1 - i\alpha^3 \nu U_1 - \frac{1}{2} L(U_1) = \\ = -\frac{1}{H_1} \left[ -\Gamma\alpha^2 U_0 U_1 - \Gamma \frac{1}{2} \alpha^2 \bar{U}_1 U_2 \exp(-2\nu\alpha^2 t) + 3D i\alpha \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - \right. \\ \left. - 3D\alpha^2 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - D i\alpha^3 U_1 - 6E\alpha^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - 4E i\alpha^2 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \alpha^4 E U_1 - \right. \\ \left. - 10G i\alpha^3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} + 5\alpha^4 G \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + G i\alpha^5 U_1 \right] \quad (2.5)$$

$$4\alpha\omega U_2 - 4i\alpha^3 \nu U_2 = -\frac{1}{H_1} \left[ -\alpha^2 U_1^2 \Gamma - 8i\alpha^3 U_2 D + \right. \\ \left. + 16\alpha^4 U_2 E + 32\alpha^5 i U_2 G \right] \quad (2.6)$$

При написании (2.6) опущены слагаемые, содержащие производные второй гармоники, что допустимо при  $E\alpha^3 \gg 1$ .

Для дифракционных задач  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\epsilon}$  и из уравнения (2.4) следует

$U_0 \sim \varepsilon^3$  ( $\varepsilon$  - малая величина порядка  $U_1$ ), поэтому соответствующие слагаемые в (2.5) следует отбросить. тогда из (2.5) с учетом (2.2), (2.3) можно получить уравнение первой гармоники для произвольной однородной электропроводящей несимметричной газожидкостной смеси в магнитном поле

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \left[ -\frac{3}{H_1} E i \alpha^3 - \frac{2}{H_1} D \alpha^2 + \frac{4}{H_1} \alpha^4 G \right] + \\ & + \frac{1}{H_1} (3D i \alpha - 6E \alpha^2 - 10G i \alpha^3) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} = \\ & = \frac{1}{2H_1} \frac{\Gamma^2 \alpha^2 \bar{U}_1 U_1^2 \exp(-2\nu \alpha^2 t)}{-4D i \alpha + 12E \alpha^2 + 28G i \alpha^3} - \frac{1}{2} L(U_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В неоднородной среде в (2.7) добавится член  $-i\alpha U_1 \frac{\partial \ln \Phi}{\partial t}$ .

Заметим, что из уравнения (2.6), с учетом (2.2) и (2.3), можно получить  $U_2 \sim \varepsilon^2$ .

3. В случае стационарной дифракционной задачи в уравнение (2.7) можно полагать  $\left( \frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_\tau = \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_{x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1} = \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1}$ , что следует из

$\tau = \tau_1(x_1) - t$ , где  $x_1$  - исходная система координат, то  $(\partial U_1 / \partial t)_x = 0$ .

Для дифракционных задач можно  $\partial^2 U_1 / (\partial \tau_1)^2$  отбросить по сравнению с  $\partial^2 U_1 / \partial y^2$ . Тогда, после замены в экспоненте  $t$  на  $\tau_1$ , уравнение (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} & i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1} \left( 1 - \frac{3}{H_1} E \alpha^2 + \frac{2}{H_1} D \alpha i - \frac{4}{H_1} G \alpha^3 i \right) = \\ & = \frac{1}{2H_1} \frac{\Gamma^2 \alpha \bar{U}_1 U_1^2 \exp(-2\nu \alpha^2 \tau_1)}{-4D i + 12E \alpha + 28G i \alpha^2} + \frac{1}{2} L(U_1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предполагая, что коэффициенты  $D\alpha$ ,  $E\alpha^2$ ,  $G\alpha^3$  малы по сравнению с единицей, уравнение (3.1) перепишем в виде

$$i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1} = \frac{1}{2H_1} \frac{\Gamma^2 \alpha \bar{U}_1 U_1^2 \exp(-2\nu \alpha^2 \tau_1)}{-4D i + 12E \alpha + 28G i \alpha^2} + \frac{1}{2} L(U_1) \quad (3.2)$$

Рассмотрим осесимметричную задачу при начальном магнитном поле, направленном по оси пучка  $x$   $H_x = H$ ,  $H_y = H_z = 0$  и в качестве  $y$  берем радиальную координату.

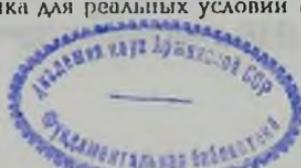
В случае системы координат связанной с начальной волной,  $\alpha_2 \approx 0$ ,  $\alpha_3 \approx 0$  и поскольку выбрано  $H_x = H_0$ , можно получить:

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2} = -\frac{c^3}{2c^2 - a_{*0}^2 - a_1^2} \quad (3.3)$$

В линейном приближении имеет место уравнение [4]

$$c^4 - c^2 [a_{*0}^2 + a_1^2] + a_1^2 a_{*0}^2 = 0 \quad (3.4)$$

Откуда получится на оси пучка для реальных условий  $a_{*0} > a_1$ , что  $c = a_{*0}$  для быстрой волны,



$c = a_1$  для медленной волны.

Из уравнения (3.2) можно получить

$$i \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1} = U_1 |U_1|^2 (\chi_1 + i\chi_2) + \frac{1}{2\alpha} L(U_1) \quad (3.5)$$

где

$$\chi_1 = 3E\alpha^2\zeta, \quad \chi_2 = (D\alpha - 7G\alpha^3)\zeta$$

$$\zeta = \frac{1}{8H_1\alpha} \frac{\Gamma^2 \exp(-2\nu\alpha^2\tau_1)}{9E^2\alpha^2 + (D - 7G\alpha^2)^2} \quad (3.6)$$

Положим

$$U_1 = ae^{i\varphi} \quad (3.7)$$

где  $a$  - амплитуда,  $\varphi$  - фаза.

Рассмотрим осесимметричную задачу, зависящую от  $(\tau_1, y)$ . Тогда из (3.5) с учетом (3.4) получим для действительной части

$$-a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} = a^3 \chi_1 + \frac{1}{2\alpha} H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial a}{\partial y} \right] \quad (3.8)$$

и для мнимой части

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_1} = a^3 \chi_2 + \frac{1}{2\alpha} H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left[ a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{y} a \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \quad (3.9)$$

Решение (3.8), (3.9) ищем в виде

$$a = \frac{K}{f} \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right), \quad \varphi = \sigma(\tau_1) + k \frac{y^2}{2} \quad (3.10)$$

где  $K$  - константа,  $f(\tau_1)$ ,  $k = k(\tau_1)$ ,  $\frac{kH_1}{\alpha}$  - кривизна волны.

$y_0 = \text{const}$  - начальный радиус пучка.

Подставляя (3.10) в (3.8) и (3.9), получим

$$\begin{aligned} -\left[ \sigma'(\tau_1) + k'(\tau_1) \frac{y^2}{2} \right] &= \chi_1 \frac{K^2}{f^2} \exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2\alpha} H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left[ -\frac{4}{f_0^2 f^2} + \frac{4y^2}{y_0^4 f^4} - k^2 y^2 \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} -\frac{f'}{f} + \frac{2fy'}{y_0^2 f^3} &= \chi_2 \frac{K^2}{f^2} \exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2\alpha} H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left[ 2k - \frac{4y^2 k}{y_0^2 f^2} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь и далее штрих - производная по  $\tau_1$ .

Считая, что пучки приосевые, то есть  $\frac{y}{y_0 f} \ll 1$ ,  $\exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right)$

разлагаем по степеням  $\frac{y}{y_0 f}$  и приравняем члены порядка единицы и  $y^2$  в (3.11) и (3.12), тогда получим уравнения

$$-\sigma'(\tau_1) = \chi_1 \frac{K^2}{f^2} - \frac{1}{2\alpha} H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{4}{y_0^2 f^2} \quad (3.13)$$

$$-\frac{k'(\tau_1)}{2} = -\chi_1 \frac{K^2}{f^2} \frac{2}{y_0^2 f^2} + \frac{1}{2\alpha} H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left[ \frac{4}{y_0^2 f^2} - k^2 \right] \quad (3.14)$$

$$-\frac{f'}{f} = \chi_2 \frac{K^2}{f^2} + \frac{1}{\alpha} H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} k \quad (3.15)$$

Отметим, что уравнения, полученные из (3.12), приравняв членов с нулевой степенью  $y$  и  $y^2$  совпадают и приводятся к уравнению (3.15). Совпадение этих уравнений является следствием осесимметричности задачи, в плоской задаче получаются противоречивые уравнения в случае  $\chi_2 \neq 0$ .

Подставляя значение  $k$  из (3.5) в (3.14), получим уравнение для  $f$  в виде

$$f'' = \frac{\xi}{f^3} + 2\nu\alpha^2\chi_2 \frac{K^2}{f} \quad (3.16)$$

$$\xi = -\chi_1 K^2 \frac{4}{y_0^2 \alpha} H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} + \frac{4}{y_0^2} \left( \frac{H_1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \right)^2 - \chi_2^2 K^4 \quad (3.17)$$

Таким образом, имеется решение уравнения (3.5) в виде узких (приосевых) пучков, которые приводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению (3.16). В случае малой диссипации в (3.6) можно полагать  $\exp(-2\nu\alpha^2\tau_1) \approx 1$  и второе слагаемое в (3.16) можно отбросить, тогда получится уравнение нелинейной оптики [4]

$$f'' = \frac{\xi}{f^3} \quad (3.18)$$

где  $\xi = \text{const}$ , такой же результат получится для сильной диссипации, для которой  $\exp(-2\nu\alpha^2\tau_1) \approx 0$  и имеет место линейное решение (3.18), в котором  $\chi_1 = \chi_2 = 0$ . В обоих случаях имеет место уравнение (3.18), в котором  $\xi = \text{const}$ . Тогда, интегрируя (3.18) при начальных условиях

$$\tau_1 = 0, \quad f = 1, \quad k = \frac{1}{R_0}, \quad f' = -\frac{H_1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{R_0} - \chi_2 K^2 \quad (3.19)$$

где  $\frac{\alpha}{H_1} R_0$  — начальный радиус кривизны фронта волны, получим решение в виде

$$-\tau_1 = \frac{\sqrt{Cf^2 - \xi}}{C} - \frac{\sqrt{C - \xi}}{C} \quad (3.20)$$

где

$$C = \left( \frac{1}{R_0} \frac{H_1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} + \chi_2 K^2 \right)^2 + \xi \quad (3.21)$$

Значение  $\tau_1$  для фокуса, в котором  $f = 0$ , действительно при  $\xi < 0$ , причем в случае быстрой волны  $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} < 0$  и  $\xi > 0$ .

Таким образом, быстрые магнитогидродинамические волны не

самофокусируются, а медленные волны, для которых  $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} > 0$ , могут фокусироваться.

Согласно (1.3)-(1.7) для быстрой волны, в которой  $c = a_{\text{сн}}$ , в коэффициенты  $D, E, G$  магнитное поле и несимметричность жидкости не входят. Для медленной волны  $c = a_1$ , коэффициенты  $D, E, G$  зависят от магнитного поля и несимметричности жидкости, причем  $E = 1/8a_1$ .

В линейном приближении без учета диссипации и дисперсии соотношения совместности на волне имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \rho \delta \rho = \rho \delta u, \quad c^2 \delta \rho = a_{\text{сн}}^2 \delta \rho, \quad -\rho c \delta V_y = \mu_r H_0 \delta H_y, \\ -c \delta H_y - H_0 \delta V_y = 0 \quad (c_n = c, V_x = 0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Для быстрой волны  $c = a_{\text{сн}}$  и из (3.22) следует  $\delta \rho \neq 0$ ,  $\delta u \neq 0$ ,  $\delta V_y = \delta H_y = 0$ , т.е. волна продольная. Для медленной волны  $c = a_1$ , следовательно, как следует из (3.22)  $\delta \rho = \delta u = 0$

$\rho c \delta V_y = \frac{\mu_r H_0^2}{c} \delta V_y$ , откуда получится  $\delta V_y \neq 0$  и  $\delta H_y \neq 0$ , т.е. медленная волна есть поперечная. Тогда уравнение (1.2) можно написать и для медленной волны, только в нем нужно  $u$  заменить на  $V_y$  и отбросить

нелинейный член  $\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau}$ . Поэтому все выкладки, начиная с формулы

(1.3), где заменено  $u$  на  $V_y$ , остаются в силе, только следует полагать  $\Gamma = 0$ . Тогда, в выбранном приближении получим уравнение модуляции (3.2), где следует считать  $U_1 = V_1$  и  $\Gamma = 0$ . Тогда, задавая начальное условие при  $\tau_1 = 0$  в виде продольных колебаний в форме гауссова пучка, получим быструю волну, определяемую формулами (2.1), (3.7) и (3.16), а задавая начальное условие в форме поперечных колебаний, получим формулу (3.18), где следует полагать в  $\xi$   $\chi_1 = \chi_2 = 0$ .

Таким образом, начальное возмущение в форме гауссова пучка расщепляется на квазипродольную быструю волну и квазипоперечную медленную волну.

Для произвольной диссипации имеется уравнение (3.16) и его следует решать численно при начальных условиях (3.19).

4. Для численного решения уравнений (3.16) и (3.20) запишем их в безразмерном виде. Уравнение (3.16) в безразмерной форме будет иметь вид

$$\frac{d^2 f}{d\tau^{*2}} = \frac{\xi^*}{f^3} + 2\nu^* \chi_2^* \frac{K^{*2}}{f} \quad (4.1)$$

где

$$\xi^* = -\chi_1^* K^{*2} \frac{4}{y_0^{*2}} \frac{\partial^2 \alpha_1^*}{\partial \alpha_2^{*2}} + \frac{4}{y_0^{*4}} \left( \frac{\partial^2 \alpha_1^*}{\partial \alpha_2^{*2}} \right)^2 - \chi_2^{*2} K^{*4} \quad (4.2)$$

Начальные условия (3.19) в безразмерной форме запишутся так:

$$\tau_1^* = 0, \quad f = 1, \quad \frac{df}{d\tau_1^*} = -\frac{\partial^2 \alpha_1^*}{\partial \alpha_2^{*2}} \frac{1}{R_0^*} - \chi_2^* K^{*2} \quad (4.3)$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные и величины:

$$\begin{aligned} \tau^* &= \alpha\tau_1, \quad \nu^* = \alpha\nu, \quad G^* = \frac{G\alpha^3}{H_1} \\ E^* &= \frac{E\alpha^2}{H_1}, \quad D^* = \frac{D\alpha}{H_1}, \quad \zeta^* = \frac{\alpha}{H_1^2} = \zeta \\ \chi_1^* \frac{\alpha}{H_1^2} &= \chi_1, \quad \chi_2^* \frac{\alpha}{H_1} = \chi_2, \quad K^* H_1 = K \\ y_0^* \frac{H_1}{\alpha} &= y_0, \quad H_1 \frac{\partial^2 \alpha_1^*}{\partial \alpha_2^{*2}} = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}, \quad \xi^* \alpha^2 = \xi \\ R_0^* \frac{H_1^2}{\alpha^2} &= R_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тогда соотношения (3.6) в безразмерной форме будут

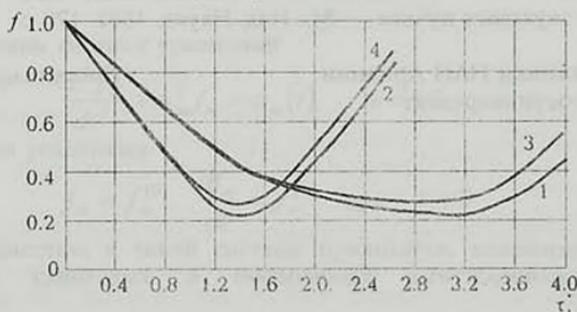
$$\begin{aligned} \chi_1^* &= 3E^* \zeta^*, \quad \chi_2^* = (D^* - 7G^*) \zeta^* \\ \zeta^* &= \frac{1}{8} \frac{\Gamma^2 \exp(-2\nu\tau_1^*)}{9E^{*2} + (D^* - 7G^*)^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнение (3.20) в безразмерной форме имеет вид

$$\tau_1^* = \frac{\sqrt{C^* - \xi^*}}{C^*} - \frac{\sqrt{C^* f^2 - \xi^*}}{C^*} \quad (4.6)$$

Вводя безразмерное переменное  $C^* = C/\alpha^2$ , согласно формуле (3.21) будем иметь

$$C^* = \left( \frac{1}{R_0^*} \frac{\partial^2 \alpha_1^*}{\partial \alpha_2^{*2}} + \chi_2^* K^{*2} \right)^2 + \xi^* \quad (4.7)$$



Фиг. 2

Результаты численных расчетов приведены на фиг.2, где кривая 1 соответствует случаю отсутствия магнитного поля, для которого

$A = \frac{\partial^2 \alpha_1^*}{\partial \alpha_2^{*2}} = -1$ , кривая 2 соответствует учету магнитного поля и выбрано

$A = -2$ . При расчетах выбраны следующие значения безразмерных величин:  $\Gamma = 10$ ,  $E^* = 1$ ,  $K^* = 0.1$ ,  $y^* = 5$ ,  $1/R_0^* = -0.3333$ ,  $D^* = -1$ ,  $\nu^* = 1$ .

Кривая 3 соответствует  $A = -1$ , кривая 4 соответствует учету магнитного поля и выбрана  $A = -2$ . Остальные величины те же, кроме  $D^* = 0$ ,  $\nu^* = 0$ , то есть отсутствует диссипация.

Из фиг.2 видно, что наличие магнитного поля уменьшает фокальное

расстояние для фокального пятна. Наличие диссипации также приводит к уменьшению фокального расстояния. При этом безразмерные ширины пучков в фокальном пятне практически остаются без изменения.

В заключение отметим, что в настоящей работе предположена значительная величина параметра дисперсии ( $\omega l \gg 1$ ), что приводит к пренебрежению производных второй гармоники и к условию  $U_2 \ll U_1$ , причем, как показано при этом, характер квазимонохроматичности профиля волны в процессе распространения не меняется. В то же время при условии конечность-дисперсии ( $\omega l \approx 1$ ) или ее отсутствия, как показывают численные расчеты, профиль волны может стать разрывным [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Петросян А.Г. Уравнение коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. II. Коэффициенты уравнений коротких волн для теплопроводящей жидкости с моментными напряжениями. — ЖТФ, 1980, т.50, вып.12, с.2512-2519.
2. Багдоев А.Г., Петросян А.Г. Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. I. Упрощенные уравнения коротких волн для произвольной нелинейной слабо-диссипативной среды. — ЖТФ, 1980, т.50, вып.12, с.2504-2511.
3. Петросян А.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. — Ереван: Изд. ЕГУ, 1984. 308 с.
4. Багдоев А.Г., Петросян А.Г. Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости. — Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т.36, №5, с. 3-16.
5. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. — М.: Изд. Наука, 1982. 176 с.

Институт механики НАН Армении  
Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию  
29.11.1996