



В работе [1] при неизменном весе конструкции определены его оптимальные геометрические  $(\alpha, h_1, h_2)$  и физические  $(\varphi)$  параметры, обеспечивающие наибольшее значение критической нагрузки.

Допуская работу оптимальной конструкции в закритической стадии, определяется наибольшее значение допускаемого сжимающего усилия  $p$ , удовлетворяющее условиям прочности пластинки и ребер, а также общей потери устойчивости конструкции.

Приводятся результаты числовых расчетов.

Решение задачи определения напряженно-деформированного состояния пластинки в закритической стадии производится энергетическим методом Ритца.

Функция прогибов, удовлетворяющая условиям шарнирного опирания по краям  $y = 0$  и  $y = b$  и условию

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a$$

выбирается в виде [2]

$$w = f_1 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_0 \sin \frac{\pi y}{b} \quad (1)$$

Величины  $f_1$  и  $f_0$  равны стрелам прогиба пластинки и ребер.

Подставляя (1) в уравнение совместности деформаций в срединной поверхности пластинки

$$a_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \quad (2)$$

и решая ее относительно функции усилий  $\Phi$ , получается

$$\Phi = \frac{1}{32} f_1^2 \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{1}{a_{11}} \cos \frac{2\pi}{a} x - \frac{1}{16a_{11}} \cos \frac{4\pi}{a} x + \frac{b^4}{a^4 a_{22}} \cos \frac{2\pi}{b} y - \frac{1}{A_0} \cos \frac{2\pi}{a} x \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{2\pi}{b} y \right) + \frac{1}{16} f_1 f_0 \left( \frac{1}{a_{11}} \cos \frac{2\pi}{a} x - \frac{1}{A_0} \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} y \right) - p h_2 \frac{x^2}{2} \quad (3)$$

Здесь приняты обозначения:

$$a_{ik} = \frac{B_{ik}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}, \quad i, k = 1, 2, \quad a_{66} = \frac{1}{B_{66}}$$

$$A_0 = a_{11} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{a^2}{b^2} + a_{22} \frac{a^4}{b^4}$$

Общая энергия системы будет

$$\varepsilon = U_{\text{н}} + U_{\text{ср}} + U_{\text{н.р.}} - W - W'$$

где  $U_{\text{н}}$  - энергия изгиба пластинки,  $U_{\text{ср}}$  - энергия деформаций в срединной плоскости пластинки,  $U_{\text{н.р.}}$  - энергия изгиба ребер,  $W$  - работа внешних сил, приложенных к пластинке,  $W'$  - работа внешних сил, приложенных к ребрам.

Вычисляя энергию системы с использованием известных формул [2], [3], из условий

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial f_0} = 0 \quad (4)$$

получается следующая система уравнений:

$$f_1^2 \left( \bar{f}_0 (3 + 2\bar{f}_0) \left( \frac{1}{a_{11}} + \frac{\pi^4}{a^4 A_{11}} \right) + \left( \frac{17}{16a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} \frac{b}{a^3} + \frac{\pi^4}{2a^4 A_{11}} \right) \right) +$$

$$+ 4 \left( 3D_{22} + \frac{16b^4}{a^4} D_{11} + 8(D_{12} + 2D_{66}) \frac{b^2}{a^2} + 8D_{22} \bar{f}_0 \right) -$$

$$- 4 \frac{ph_2 b^2}{\pi^2} (3 + 4\bar{f}_0) = 0 \quad (5)$$

$$f_1^2 \left( \frac{1}{a_{11}} + \frac{\pi^4}{A_0 a^4} \right) (1 + 2\bar{f}_0) + 16D_{22} (1 + 2\bar{f}_0) + \frac{64}{a} E J \bar{f}_0 -$$

$$- \frac{16ph_2}{\pi^2} b^2 (1 + 2\bar{f}_0) + \frac{64b^2}{\pi^2 a} \sigma_p A_p \bar{f}_0 = 0$$

Здесь:  $\bar{f}_0 = \frac{f_0}{f_1}$ ,  $A_p = \alpha h_1^2$  - площадь сечения ребра,  $J = \frac{\alpha h_1^3}{12}$

момент инерции сечения ребра,  $\sigma_p$  - сжимающее усилие в ребре пластинки, определяемое по формуле

$$\sigma_p = \frac{P}{\psi} \quad (6)$$

где  $\psi$  - редуционный коэффициент, который до момента потери устойчивости может быть принятым, равным единице.

Напряжение  $\sigma_p$  может быть вычислено также по формуле

$$\sigma_p = E_1 e \quad (7)$$

где  $e$  - относительное сближение нагруженных кромок пластинки, определяемое из выражения

$$e = \frac{1}{b} \int_0^b \left( -a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) dy$$

откуда

$$e = \frac{1}{32} \frac{\pi^2}{b^2} (3f_1^2 + 8f_0 f_1 + 8f_0^2) + a_{11} p h_2 \quad (8)$$

Отбрасывая в уравнениях (5) нелинейные члены и принимая  $p = \sigma_p = p_{кр}$  получится система уравнений для определения критического напряжения

$$4 \left( 3D_{22} + \frac{16b^4}{a^4} D_{11} + 8(D_{12} + 2D_{66}) \frac{b^2}{a^2} + 8D_{22} \bar{f}_0 \right) -$$

$$- 4 p_{кр} \frac{h_2 b^2}{\pi^2} (3 + 4\bar{f}_0) = 0 \quad (9)$$

$$16D_{22} (1 + 2\bar{f}_0) + \frac{64}{a} E J \bar{f}_0 - 16 \frac{p_{кр} h_2 b^2}{\pi^2} (1 + 2\bar{f}_0) + \frac{64b^2}{\pi^2 a} p_{кр} A_p \bar{f}_0 = 0$$

Определив  $p_{кр}$  из системы (9) в зависимости от параметров  $\alpha$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $\phi$ , можно решить задачу оптимизации по нахождению наибольшего критического напряжения.

Допуская работу оптимальной по устойчивости конструкции в закритической стадии, определяется наибольшее допустимое значение

сжимающей нагрузки  $p$ , удовлетворяющее условиям общей потери устойчивости конструкции, прочности пластинки и ребра.

Условие общей потери устойчивости конструкции записывается в виде

$$\sigma_p \leq \sigma_{кр}^0 \quad (10)$$

где  $\sigma_p$  - напряжение в редуцированном сечении конструкции, определяемое формулой (6),  $\sigma_{кр}^0$  - критическое напряжение конструкции, рассматриваемой как балка с редуцированным сечением

$$\sigma_{кр}^0 = \frac{\pi^2 D_{пр}}{A_{пр}} \quad (11)$$

где:  $A_{пр}$  и  $D_{пр}$  - площадь и изгибная жесткость редуцированного сечения

$$A_{пр} = 2\alpha h_1^2 + \psi a h_2$$

$$D = \frac{\alpha h_1^4}{6} E_1 + B_{22} \frac{\psi a h^3}{12}$$

Условие (10) с учетом (6) и (11) приводится к виду

$$p \leq \psi \frac{\pi^2 D_{пр}}{A_{пр}} \quad (12)$$

Условие прочности пластинки принимается в виде

$$\left( \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}} \right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} \leq 1 \quad (13)$$

где  $\sigma_{B1}$ ,  $\sigma_{B2}$ ,  $\tau_{B0}$  - прочностные характеристики монослоев КМ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  - напряжения по главным физическим направлениям пластинки, определяемые по формулам

$$\sigma_{11} = B_{11}^0 e_{11} + B_{12}^0 e_{12}, \quad \sigma_{22} = B_{12}^0 e_{11} + B_{22}^0 e_{22}$$

$$\sigma_{12} = B_{66}^0 e_{12}$$

$e_{11}$ ,  $e_{22}$ ,  $e_{12}$  - деформации по главным физическим направлениям пластинки, которые известными формулами поворота выражаются через деформации по главным геометрическим направлениям пластинки, определяемые по формулам

$$e_x = a_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_y = -a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$e_{xy} = -a_{66} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Условие прочности ребра

$$\sigma_{p\max} \leq \sigma_{B1} \quad (14)$$

где  $\sigma_{p\max}$  - наибольшее значение в ребре, определяемое формулой

$$\sigma_{p\max} = E_1 e_{p\max}$$

$\epsilon_{p\max}$  - наибольшая деформация в ребре, принимаемая равной деформации пластинки при  $x = 0, y = b, z = -h_1/2$ .

Определение наибольшего допустимого значения усилия производится в следующей последовательности.

Задается значение  $p > p_{кр}$ , увеличивая его с некоторым шагом. Для каждой ступени нагрузки, принимая коэффициент  $\psi$  равным его значению предыдущего шага (на первом шаге принимается  $\psi = 1$ ), определяется из (6)  $\sigma_p$ , а затем из системы (5) -  $f_1$  и  $\bar{f}_0$ . Вычисляя по формулам (7), (8) значение  $\sigma_p$ , из (6) снова определяется значение  $\psi$ . Последовательными приближениями на каждом шаге уточняются значения  $\psi, f_1, \bar{f}_0$ , после чего производится проверка условий (12)-(14). Значение усилия, увеличение которого приводит к нарушению одного из этих условий, принимается за наибольшую допустимую нагрузку.

Числовые расчеты произведены для примера, рассмотренного в работе [1], где прочностные характеристики КМ приняты:

$$\sigma_{B1} = 188.6 \cdot 10^{-4} B_{11}^0, \sigma_{B2} = 77.18 \cdot 10^{-4} B_{11}^0, \tau_{B0} = 49.72 \cdot 10^{-4} B_{11}^0$$

Решение задачи оптимизации на основе уравнений (9) приводит к результатам, близким к приведенным в работе [1], поэтому при расчете пластинки в закритической стадии они принимаются в качестве исходных.

Как показывают расчеты, в рассмотренных случаях активным является условие общей потери устойчивости конструкции.

В табл. 1 для различных значений приведенных толщин пластинки  $\bar{h}_0 = h_0/b$  приведены значения оптимальных по устойчивости параметров  $\alpha, \bar{h}_1 = h_1/b, \bar{h}_2 = h_2/b, \varphi$ , соответствующие значения  $\bar{p}_{кр} = p_{кр}/B_{11}^0$  [1] и полученные здесь значения наибольшей приведенной допустимой нагрузки  $\bar{p} = p/B_{11}^0$ , приведенных стрел прогибов пластинки  $\bar{f}_1 = f_1/h$  и ребер  $\bar{f}_0 = f_0/f_1$ , а также редуцированного коэффициента  $\psi$ .

Таблица 1

$\bar{h}_0$	$\alpha$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\varphi^0$	$\bar{p}_{кр} \cdot 10^3$	$\bar{p} \cdot 10^3$	$\bar{f}_1$	$\bar{f}_0$	$\psi$
0.010	0.2	0.069	0.0083	45	0.211	0.297	0.64	0.4	0.22
0.015	0.2	0.090	0.0120	45	0.457	0.571	0.64	0.4	0.21
0.020	0.2	0.108	0.0160	45	0.790	0.862	0.76	0.5	0.18

Сравнение результатов табл.1 показывает, что допущение работы пластинки после потери устойчивости позволяет увеличить ее несущую способность. Причем это увеличение заметнее для более тонких пластин. Так, при  $\bar{h}_0 = 0.01$   $k = p/p_{кр} = 1.3$ , а при  $\bar{h}_0 = 0.02$   $k = 1.1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э.В. Оптимизация по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по двум краям податливыми на изгиб ребрами жесткости. - Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем (сб. научн. тр. конференции), Ереван, 1997, с 100-103.
2. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Гостехтеориздат, 1956. 419с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гостехиздат, 1957. 463с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
6.10.1996