

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ
 ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Ананян А. К.

Ա. Կ. Անանյան

Սալի կայունության խնդրի մասին ընդլայնական սահերի հաշվամանր

Գլխավորում է իզոտրոպ ուղղանկյան սալի ստատիկ կայունության խնդիրը բեռնավորված իր հարթությունում սեղմող ուժով: Սալի դիմալին մակերևույթների վրա եզրային պայմանների ճշգրտությունը եկտո, ստացվել են սալի ստատիկ կայունության ինքնասարմաները:

Լուծված է սալի ստատիկ կայունության խնդիրը երկու սալայրը եզրային պայմանների դեպքում:

Ուշադրանք են կրիտիկական ուժերը և ճշված է սարքերայունը Ա.Ա. Համբարձումյանի տեսությամբ ստացված կրիտիկական ուժերից:

A.K. Ananian

On Stability Problem of a Plate With the Account of Transverse shears

Рассматривается задача статической устойчивости прямоугольной изотропной пластинки, нагруженной в своей плоскости сжимающей силой. Путем уточнения условий на лицевых поверхностях [1] получены уравнения статической устойчивости пластинки.

Решена задача статической устойчивости пластинки с двумя вариантами граничных условий.

Определены критические силы и приведены оценки отклонения их от критических сил, полученных по теории С. А. Амбарцумяна [2].

1. Рассмотрим задачу статической устойчивости прямоугольной изотропной пластинки постоянной толщины $2h$ с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , нагруженной в своей плоскости сжимающей силой σ_0 . Начальное напряженное состояние следующее:

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_0 = \text{const}, \quad \sigma_{ij}^0 = 0 \quad (\text{кроме } i = j = 1)$$

Пусть пластинка занимает область $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$.

Для решения этой задачи возьмем трехмерные уравнения упругости с учетом предварительного напряжения в простейшем виде [3,4]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

В работе [1] получены нелинейные граничные условия на лицевых поверхностях пластинки. После линеаризации этих граничных условий с учетом начального напряжения получим

$$z = h: \sigma_{13} = \sigma_0 \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = 0$$

$$z = -h: \sigma_{13} = -\sigma_0 \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (1.2)$$

Согласно теории С. А. Амбарцумяна, учитывающей поперечный сдвиг, из $\epsilon_{33} = 0$ вытекает

$$u_3 = w(x, y)$$

В [2], согласно обозначениям этой статьи, принято

$$\sigma_{13} = 2G \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi(x, y)$$

что удовлетворяет условию равенства нулю напряжения при $z = \pm h$

Согласно (1.2) аналогичное выражение для σ_{13} будет

$$\sigma_{13} = \frac{z}{h} \sigma_0 \frac{\partial w}{\partial x} + 2G \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi(x, y)$$

откуда следует

$$\varepsilon_{13} = \frac{z}{2Gh} \sigma_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi(x, y)$$

Выражения для σ_{23} и ε_{23} остаются такими же, как в [2]. В частности,

$$\varepsilon_{23} = \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \psi(x, y)$$

Воспользуясь соотношениями между деформациями и перемещениями, получим

$$u_1 = u(x, y) - z \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{2Gh} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + 2z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \varphi \quad (1.3)$$

$$u_2 = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + 2z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \psi \quad (1.4)$$

Перейдем к определению напряженного состояния. Подставляя значения деформации с учетом (1.3) и (1.4) в закон Гука, где пренебрегаем напряжением σ_{33} , для основных напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} получим

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left[\left(1 - \frac{\sigma_0 z}{2Gh} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{2Gh} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + 2z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{12} = G \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left(2 - \frac{\sigma_0 z}{2Gh} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]$$

Получим уравнения равновесия пластинки в перемещениях. Поступая обычным образом, вместо напряжений введем в рассмотрение статически эквивалентные им внутренние, перерезывающие силы и моменты, выражения которых согласно (1.7) будут иметь вид:

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sigma_0 h}{6G} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma_0 h}{6G} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$S = 2Gh \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma_0 h}{6G} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad N_1 = \frac{8Gh}{3} \varphi, \quad N_2 = \frac{8Gh}{3} \psi \quad (1.6)$$

$$M_1 = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{8}{5} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]$$

$$M_2 = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{8}{5} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]$$

$$H = -(1-\nu)D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{4}{5} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]$$

Осредненные уравнения равновесия будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + 2h\sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(w + \frac{\sigma_0 h^2}{6G} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + 2h\sigma_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + 2h\sigma_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 - \frac{2\sigma_0 h^3}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{8}{5} \varphi \right) &= 0 \\ \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - N_2 - \frac{2\sigma_0 h^3}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{8}{5} \psi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставляя внутренние, перерезывающие силы и моменты из (1.6) в (1.7), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\sigma_0 h}{6G} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + \\ + 2h\sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(w + \frac{\sigma_0 h^2}{6G} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= 0 \\ \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\sigma_0 h}{6G} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2h\sigma_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{3\sigma_0}{4G} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \left(1 + \frac{2\sigma_0 h^3}{3D} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{8}{5} \left(1 + \frac{2\sigma_0 h^3}{3D} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{4}{5} (1-\nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \\ - \frac{4}{5} (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{8Gh}{3D} \varphi &= 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(1 + \frac{2\sigma_0 h^3}{3D} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{8}{5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{4}{5} \left(1-\nu + \frac{4\sigma_0 h^3}{3D} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \\ - \frac{4}{5} (1+\nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{8Gh}{3D} \psi &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Система (1.8) отличается от обычно используемых уравнений с учетом поперечных сдвигов следующим:

1) Известно, что задача обобщенного плоского напряженного состояния и задача изгиба пластинки отделяются, а здесь задача изгиба отделяется от задачи обобщенного плоского состояния, но чтобы решить плоскую задачу, надо сперва решить задачу изгиба.

2) В уравнениях, полученных по теории С. А. Амбарцумяна, отсутствуют следующие дополнительные члены — подчеркнутые и произведения от σ_0 и производных функций $w(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ кроме соответствующего произведения в третьем уравнении. Указанный член из третьего уравнения является основным во всех теориях устойчивости пластин.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости шарнирно опертой по всему контуру пластинки, загруженной в своей плоскости сжимающей силой, действующей лишь в одном направлении, в направлении оси OX .

Пусть интенсивность равномерно распределенной нагрузки равна P , то есть $\sigma_0 = -P$. В этом случае три последних уравнения системы

(1.8) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{3P}{4G} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \frac{4(1-\nu)D}{5} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{2Ph^3}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \\ + \frac{8Ph^3}{5(1-\nu)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{16Ph^3}{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{8Gh}{3} \varphi \\ -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{4(1-\nu)D}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{2Ph^3}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\ + \frac{8Ph^3}{5(1-\nu)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{16Ph^3}{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{8Gh}{3} \psi \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$

Система (2.1) отличается от полученных уравнений по теории С. А. Ламбарцумана подчеркнутыми членами. И эти члены обусловлены уточнением условий на лицевых поверхностях пластинки.

Соответствующие граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x=0, a: \quad w=0, \quad M_1=0, \quad \psi=0 \\ y=0, a: \quad w=0, \quad M_2=0, \quad \varphi=0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

После введения новой вспомогательной функции $\Phi(x, y)$, которая связана с функциями $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ следующим образом:

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \text{ систему (2.1) можно переписать в виде:}$$

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w - \frac{8h^3 P}{5(1-\nu)D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w + \frac{2Ph}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2Ph^3}{3D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w + \frac{4P^2 h^3}{5GD} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 0 \\ \Delta \Phi - \frac{2P(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{5}{2h^2} \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Представим прогиб $w(x, y)$ выражением

$$w(x, y) = f \sin \mu_m x \sin \lambda_n y \quad (2.4)$$

где $\mu_m = \frac{m\pi}{a}$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$

m и n - натуральные числа, показывающие число полуволн искривленной пластинки.

Подставляя (2.4) в первое уравнение (2.3), получим следующее квадратное уравнение относительно P :

$$\frac{8h^3(1+\nu)}{5E} \mu_m^4 P^2 - 2h\mu_m^2 P \left[1 + h^2 \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \right] + D(\mu_m^2 + \lambda_n^2)^2 = 0 \quad (2.5)$$

где $\alpha = \frac{4}{5(1-\nu)}$

Решая уравнение (2.5), для критической силы получим следующее выражение:

$$P_{m,n} = P_{m,n}^0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{h^2}{2} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (\mu_m^2 + \lambda_n^2) + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{2} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \right)^2 - \frac{h^4 \alpha}{3} (\mu_m^2 + \lambda_n^2)^2 \right]^{-1/2} \right\} \quad (2.6)$$

где $P_{m,n}^0$ - критическая сила, найденная по классической теории

$$P_{m,n}^0 = \frac{D(\mu_m^2 + \lambda_n^2)^2}{2h\mu_m^2} \quad (2.7)$$

Из (2.6) видно, что отношение h^2/a^2 по сравнению с единицей - малая величина $\left(\frac{h^2}{a^2} \ll 1 \right)$, и поэтому этим членом можно пренебречь, тогда получим

$$P_{m,n} = P_{m,n}^0 \left\{ 1 + h^2 \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \right\}^{-1} \quad (2.8)$$

Решая эту задачу по теории С. А. Амбарцумяна, для критической силы получается

$$P_{m,n}^* = P_{m,n}^0 \left\{ 1 + h^2 \alpha (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \right\}^{-1} \quad (2.9)$$

Сравнивая эти два решения, можно подсчитать поправку в процентном отношении, второго члена, стоящего в скобках, когда $\nu = 0$ и $\nu = 1/2$. При $\nu = 0$ поправка второго члена приблизительно равна 40%, а при $\nu = 1/2$ поправка приблизительно составляет 20%.

3. Решим предыдущую задачу при других граничных условиях на краях $y = \text{const}$. Пусть на краях $x = \text{const}$ даны граничные условия шарнирного опирания, а на краях $y = \text{const}$ даны граничные условия скользящего контакта.

$$\begin{aligned} x=0, a: \quad w=0, \quad M_1=0, \quad \psi=0 \\ y=0, a: \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0, \quad N_2=0, \quad H=0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если в (2.6) пренебречь членом h^2/a^2 , то отсюда следует, что в формулах (1.8), (2.1) и (2.3) можно пренебрегать членами, подчеркнутыми двумя линиями. Тогда система (2.3) запишется следующим образом:

$$\Delta \Delta w - \frac{8h^3 P}{5(1-\nu)D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w + \frac{2Ph}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2Ph^3}{3D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w = 0 \quad (3.2)$$

$$\Delta \Phi - \frac{5}{2h^2} \Phi = 0$$

А (3.1) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} x=0, a: \quad w=0, \quad \frac{4h^2}{5(1-\nu)} \left[1 - \frac{P(1-\nu^2)}{E} \left(1 + \frac{12}{5(1-\nu)} \right) \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{16h^2}{25} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$y=0, b: \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{4}{5}(1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \Phi - \frac{4h^2}{5} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

где обобщенная перерезывающая сила и крутящий момент выражены через искомые функции $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$.

Полагая функцию прогиба

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \mu_m x \quad (3.4)$$

и функцию

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(y) \cos \mu_m x \quad (3.5)$$

граничные условия, написанные с помощью функций $f_m(y)$ и $\Phi_m(y)$, на краях $y = \text{const}$, будут

$$y=0, b: f_m'(y) = 0, f_m''(y) = 0, \Phi_m(y) = 0 \quad (3.6)$$

Из (3.6) вытекает, что $f_m(y)$ можно представить в виде следующего ряда:

$$f_m(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \lambda_n y \quad (3.7)$$

Тогда функцию прогиба из (3.7) и (3.4) можно представить в следующем виде:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \mu_m x \cos \lambda_n y \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в первое уравнение (3.2), найденная критическая сила будет равна

$$P_{m,n} = P_{m,n}^0 \left\{ 1 + h^2 \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \right\}^{-1} \quad (3.9)$$

Таким образом, формула (3.9) может дать все значения $P_{m,n}$, соответствующие всевозможным комбинациям значений m и n ($m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$). Как мы знаем, из всех значений $P_{m,n}$ мы должны выбрать наименьшее. После подсчетов получено, что $P_{m,n}$ становится наименьшим, когда $m = 1, n = 0$, то есть

$$P_{1,0} = \frac{D\pi^2}{2ha^2} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{a^2} h^2 \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \right\}^{-1} \quad (3.10)$$

Как и в предыдущем случае, отличие от результата по теории С.А. Амбарцумяна заключается в наличии дополнительного слагаемого $(1/3)$ в выражении (3.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Саркисян С.В. Об одном уточнении уравнений нелинейных колебаний пластин. – ЕГУ, Уч. записки 1, 1992, с. 41-46.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. 360 с.
3. Болотин В.В. Некоэрвативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 1,2. – Киев: Наукова думка, 1986.