ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա **51, №2, 1998** **Механика**

УДК 539.3

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА, УСИЛЕННОГО ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

**Аветикян В.Е., Акопян А.С.**

Վ.Ե. Ավետիքյան, Ա.Ս. Հակոբյան

**Կոնտակտային խնդիր առաձգական սեպի համար, որն ուժեղացված է երկու վերջավոր վերադիրներով**

Աշխատանքում դիտարկված է կոնտակտային խնդիր առաձգական սեպի համար, որն ուժեղացված է երկու վերջավոր վերադիրներով: Վերադիրները գտնվում են սեպի տարբեր եզրերում, ընդ որում նրանցից մեկը դուրս է գալիս սեպի գագաթ, իսկ մյուսը գտնվում է գագաթից որոշ հեռավորության վրա: Սեպը դեֆորմացվում է կենտրոնացված ուժերի ազդեցության տակ, որոնք կիրառված են վերադիրների ծայրերում: Խնդիրը ֆակտորիզացիայի և Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդների օգնությամբ հանգեցվում է համարյա լիովին կանոնավոր անվերջ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի, կոնտակտային լարումների ինտենսիվությունների Մելինի ձևափոխության մնացքների և Չեբիշևի վերլուծության գործակիցների նկատմամբ:

**V.E. Avetikian, A.S. Hakobian**

**The contact problem for elastic wedges, reinforced by two finite stiffeners**

Рассматривается контактная задача для упругого клина с двумя конечными стрингерами. Стрингеры находятся на разных гранях клина, причем один из них выходит к ее вершине, а второй находится на некотором расстоянии от вершины. Клин деформируется под действием сосредоточенных сил, приложенных к концам стрингеров. Задача при помощи метода факторизации и метода ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению квазивполне регулярной совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно вычетов трансформантов Меллина и коэффициентов разложения Чебышева интенсивностей контактных напряжений.

В настоящей работе рассматривается контактная задача для упругого клина $(-\alpha \le \varphi \le \alpha, 0 \le r < \infty)$, грани которого при $0 \le r \le a, \varphi = \alpha$ и $b \le r \le c, \varphi = -\alpha$ подкреплены двумя конечными стрингерами толщины $h$ и с модулем упругости $E_1$. Клин деформируется под действием тангенциальных сил $Q$ и $P$, приложенных соответственно на концах $r = 0$ и $r = b$.

Требуется в случае $a < b$ определить интенсивности контактных касательных напряжений, действующих на участке контакта клина со стрингерами.

Здесь, как в [1-2], относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, а для клина, модуль упругости которой равен $E$, коэффициент Пуассона $\nu$ и угол раствора $2\alpha$, предполагается, что она находится в обобщенном плоском напряженном состоянии.

В силу вышесказанного, уравнение равновесия стрингеров можно записать в следующем виде [2] :

$$\frac{d^2 u^{(1)}(r)}{dr^2} = -\frac{\tau_{(1)}(r)}{E_1 h} \quad (0 < r < a) \tag{1}$$

при условии

$$\left.\frac{du^{(1)}(r)}{dr}\right|_{r=a} = 0, \quad \left.\frac{du^{(1)}(r)}{dr}\right|_{r=0} = \frac{Q}{E_1 h} \tag{2}$$

$$\frac{d^2u^{(1)}(r)}{dr^2} = -\frac{\tau_{(2)}(r)}{E_1 h} \quad (b < r < c), \tag{3}$$

где $u^{(1)}(r)$ – перемещения точек стрингеров, $\tau_{(1)}(r)$ и $\tau_{(2)}(r)$ – интенсивности тангенциальных контактных напряжений на гранях $\varphi = \alpha$ и $\varphi = -\alpha$ соответственно.

Условия равновесия стрингеров имеют вид :

$$\int_0^a \tau_{(1)}(r)dr = Q, \quad \int_b^c \tau_{(2)}(r)dr = P \tag{4}$$

Введем следующие функции:

$$U_-^{(1)}(r) = \theta(a-r)\frac{du^{(1)}(r)}{dr}; \quad \tau_{(1)}^-(r) = \theta(a-r)\tau_{(1)}(r) \quad (0 < r < \infty) \tag{5}$$

где $\theta(r)$ – функция Хевисайда.

Тогда, имея в виду (5), из (1) и (2) получим :

$$\frac{dU_-^{(1)}(r)}{dr} = -\frac{\tau_{(1)}^-(r)}{E_1 h} \quad (0 < r < \infty) \tag{6}$$

С другой стороны, с помощью интегрального преобразования Меллина [3], из уравнений Ламе для деформаций граничных точек клиновидной области получим

$$\frac{du(r,\alpha)}{dr} = -\frac{2}{E}\int_0^\infty \tau_{(1)}^-(t)K_4\left(\frac{r}{t}\right)\frac{dt}{t} - \frac{2}{E}\int_b^c \tau_{(2)}(t)K_3\left(\frac{r}{t}\right)\frac{dt}{t} \quad (0 < r < \infty) \tag{7}$$

$$\frac{du(r,-\alpha)}{dr} = -\frac{2}{E}\int_0^\infty \tau_{(1)}^-(t)K_3\left(\frac{r}{t}\right)\frac{dt}{t} - \frac{2}{E}\int_b^c \tau_{(2)}(t)K_4\left(\frac{r}{t}\right)\frac{dt}{t} \quad (0 < r < \infty) \tag{8}$$

где $u(r,\alpha)$ и $u(r,-\alpha)$ – тангенциальные перемещения точек на границах $\varphi = \alpha$ и $\varphi = -\alpha$ клина соответственно, а

$$K_3\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin 2p\alpha \cos 2\alpha - p\sin 2\alpha \cos 2p\alpha}{\sin^2 2p\alpha - p^2 \sin^2 2\alpha}\left(\frac{r}{t}\right)^{-(p+1)} dp$$

$$K_4\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin 2p\alpha \cos 2p\alpha - p\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin^2 2p\alpha - p^2 \sin^2 2\alpha}\left(\frac{r}{t}\right)^{-(p+1)} dp$$

$$-1 + \varepsilon_1 < c < 0$$

здесь $\varepsilon_1 < 1$, $p$ – комплексный параметр преобразования.

Представим (7) в следующем виде:

$$U_{(1)}^-(r,\alpha) + U_{(1)}^+(r,\alpha) = -\frac{2}{E}\int_0^\infty \tau_{(1)}^-(t)K_4\left(\frac{r}{t}\right)\frac{dt}{t} -$$

$$-\frac{2}{E}\psi_{(1)}^-(r) - \frac{2}{E}\psi_{(1)}^+(r), \quad 0 < r < \infty \tag{9}$$

где

$$U_{(1)}^-(r,\alpha) = \theta(a-r)\frac{du(r,\alpha)}{dr}, \quad U_{(1)}^+(r,\alpha) = \theta(r-a)\frac{du(r,\alpha)}{dr}$$

$$\psi_{(1)}^-(r) = \int_b^c K_{(3)}^-\left(\frac{r}{t}\right)\tau_{(2)}(t)\frac{dt}{t}, \quad \psi_{(1)}^+(r) = \int_b^c K_{(3)}^+\left(\frac{r}{t}\right)\tau_{(2)}(t)\frac{dt}{t}$$

$$K^{-}_{(3)}\left(\frac{r}{t}\right)=\theta(a-r)K_3\left(\frac{r}{t}\right),\qquad K^{+}_{(3)}\left(\frac{r}{t}\right)=\theta(r-a)K_3\left(\frac{r}{t}\right)$$

В уравнениях (6) и (9), переходя к безразмерным величинам, а затем применяя преобразование Меллина и учитывая, что на линии контакта выполняется условие $\overline{U}^{1}_{-}(p+1)=\overline{U}^{-}_{1}(p+1)$, для определения $\overline{\tau}^{-}_{1}(p+1)$, после некоторых преобразований получим

$$\overline{Q}(p)\overline{G}(p)\overline{\tau}^{-}_{1}(p+1)+\lambda\frac{p}{p+1}\overline{\tau}^{-}_{1}(p+2)+p\overline{\psi}^{-}_{1}(p+1)=$$

$$=-p\overline{\psi}^{+}_{1}(p+1)-\frac{Ea}{2}p\overline{U}^{+}_{1}(p+1) \tag{10}$$

$$\lambda=\frac{Ea}{2E_1h},\qquad -1+\varepsilon<\operatorname{Re}p<0$$

здесь $\overline{U}^{1}_{-}(p+1),\overline{\tau}^{-}_{1}(p+1),\overline{U}^{-}_{1}(p+1),\overline{U}^{+}_{1}(p+1),\overline{\psi}^{-}_{1}(p+1)$ и $\overline{\psi}^{+}_{1}(p+1)$ -трансформанты Меллина соответственно для функции $U^{(1)}_{-}(ar),\tau^{-}_{(1)}(ar),U^{-}_{(1)}(ar),U^{+}_{(1)}(ar),\psi^{-}_{(1)}(ar),\psi^{+}_{(1)}(ar)$, причем $\overline{\tau}^{-}_{1}(p+2)$ регулярна при $\operatorname{Re}p>-2+\varepsilon$; $\overline{\tau}^{-}_{1}(p+1),\overline{\psi}^{-}_{1}(p+1)$ регулярны при $\operatorname{Re}p>-1+\varepsilon$, а $\overline{U}^{+}_{1}(p+1),\overline{\psi}^{+}_{1}(p+1)$ - при $\operatorname{Re}p<0$.

Для решения этого функционального уравнения пользуемся методом Винера-Хопфа [4], для этого необходимо факторизовать функции $\overline{Q}(p)$ и $\overline{G}(p)$, где

$$\overline{K}(p,\alpha)=\frac{\overline{Q}(p)\overline{G}(p)}{p},\quad \overline{Q}(p)=p\operatorname{ctg}2p\alpha$$

$$\overline{G}(p)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2p\alpha\,\frac{\sin 4p\alpha-p\sin 4\alpha}{\sin^2 2p\alpha-p^2\sin^2 2\alpha}$$

Пусть $p=p_1$ – корень или полюс функции $\overline{G}(p)$ в левой полуплоскости с наибольшей действительной частью, а $p_2$ – корень или полюс функции $\overline{G}(p)$ в правой полуплоскости с наименьшей действительной частью. Тогда функция $\overline{G}(p)$ будет регулярной в интервале $-1+\varepsilon=\operatorname{Re}p_1<\operatorname{Re}p<\operatorname{Re}p_2$ и там не будет иметь нулей. С другой стороны, поскольку $\overline{G}(p)\to 1$ при $|p|\to\infty$ в полосе $-1+\varepsilon<\operatorname{Re}p<\operatorname{Re}p_2$, то его можно представить в виде [4]

$$\overline{G}(p)=\frac{\overline{L}^{-}(p)}{\overline{L}^{+}(p)},\ \overline{L}^{-}(p)=\exp\overline{R}^{-}(p),\ \overline{L}^{+}(p)=\left[\exp\overline{R}^{+}(p)\right]^{-1} \tag{11}$$

$$R(r)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\ln\overline{G}(p)r^{-(p+1)}dp,\quad -1+\varepsilon<c<\operatorname{Re}p_2$$

Нетрудно видеть, что

$$\overline{Q}(p)=\overline{Q}^{+}(p)\overline{Q}^{-}(p)$$

$$\overline{Q}^{+}(p)=\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\frac{\Gamma\left(1-\dfrac{2p\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2p\alpha}{\pi}\right)},\ \overline{Q}^{-}(-p)=\overline{Q}^{+}(p) \tag{12}$$

Здесь $\overline{Q}^{+}(p)$ регулярна и не имеет нулей при $\mathrm{Re}\,p<\dfrac{\pi}{4\alpha}$, а $\overline{Q}^{-}(p)$ – при $\mathrm{Re}\,p>-\dfrac{\pi}{4\alpha}$; $\overline{L}^{+}(p)$- при $\mathrm{Re}\,p<p_2$ и $\overline{L}^{-}(p)$ – при $\mathrm{Re}\,p>-1+\varepsilon$, $\Gamma(p)$ – известная гамма-функция.

Тогда (10) можно записать в виде

$$\overline{L}^{-}(p)\overline{Q}^{-}(p)\overline{\tau}_1^{-}(p+1)+\lambda\overline{L}^{+}(p)\left[\overline{Q}^{+}(p)\right]^{-1}\frac{p}{p+1}\overline{\tau}_1^{-}(p+2)+$$

$$+p\overline{L}^{+}(p)\left[\overline{Q}^{+}(p)\right]^{-1}\overline{\psi}_1^{-}(p+1)=-\frac{Ea}{2}p\overline{L}^{+}(p)\left[\overline{Q}^{+}(p)\right]^{-1}\overline{U}_1^{+}(p+1)-$$

$$-p\overline{L}^{+}(p)\left[\overline{Q}^{+}(p)\right]^{-1}\overline{\psi}_1^{+}(p+1),\quad -1+\varepsilon<\mathrm{Re}\,p<0 \tag{13}$$

Далее, поскольку $\overline{\varphi}(p+1)=\overline{L}^{+}(p)\left[\overline{Q}^{+}(p)\right]^{-1}\dfrac{p}{p+1}\overline{\tau}_1^{-}(p+2)$, то ее можно представить в виде

$$\overline{\varphi}(p+1)=\overline{\varphi}^{+}(p+1)+\overline{\varphi}^{-}(p+1),\ \overline{\varphi}^{+}(p+1)=\int_1^{\infty}\varphi(r)r^{p}dr$$

$$\overline{\varphi}^{-}(p+1)=\int_0^{1}\varphi(r)r^{p}dr$$

$$\varphi(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{p}{p+1}\overline{L}^{+}(p)\left[\overline{Q}^{+}(p)\right]^{-1}\overline{\tau}_1^{-}(p+2)r^{-(p+1)}dp,\ -1+\varepsilon<c<0$$

Поступая аналогичным образом, для $\overline{f}(p+1)$ получим

$$\overline{f}(p+1)=\overline{f}^{+}(p+1)+\overline{f}^{-}(p+1)$$

$$\overline{f}^{+}(p+1)=\int_1^{\infty}f(r)r^{p}dr,\quad \overline{f}^{-}(p+1)=\int_0^{1}f(r)r^{p}dr$$

$$f(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}p\overline{L}^{+}(p)\left[\overline{Q}^{+}(p)\right]^{-1}\overline{\psi}_1^{-}(p+1)r^{-(p+1)}dp,\quad -1+\varepsilon<c<0$$

Очевидно, что $\overline{\varphi}^{+}(p+1),\overline{f}^{+}(p+1)$ регулярны при $\mathrm{Re}\,p<0$, а $\overline{\varphi}^{-}(p+1),\overline{f}^{-}(p+1)$-при $\mathrm{Re}\,p>-1+\varepsilon$.

Имея в виду, что $\overline{\tau}_1^{-}(p+1)\sim|p|^{-\frac{1}{2}}$, $\overline{Q}^{\pm}(p)\sim|p|^{\pm\frac{1}{2}}$ $\overline{L}^{\pm}(p)\sim 1$, $\overline{U}_1^{+}(p)\sim|p|^{-\frac{1}{2}}$ при $|p|\to\infty$ в своих областях регулярности, в силу теорем Лиувилля и аналитического продолжения, из (13) получим

$$\overline{\tau}_1^-(p+1)+\lambda\frac{\overline{\varphi}^-(p+1)}{\overline{L}^-(p)\overline{Q}^-(p)}+\frac{\overline{f}^-(p+1)}{\overline{L}^-(p)\overline{Q}^-(p)}=\frac{a_1}{\overline{L}^-(p)\overline{Q}^-(p)} \tag{14}$$

Здесь $a_1$ – неизвестная постоянная, определяемая из условия равновесия стрингера (4).

Поступая аналогично [5], элементарными рассуждениями из (10) можно заключить, что точки $p=-t_k-n+1$, $p=-\bar{t}_k-n+1$ ($\mathrm{Re}\,t_k>0$, $\mathrm{Im}\,t_k\geq 0$, $k\geq 2$, $n\geq 1$) являются простыми полюсами функции $\overline{\tau}_1^-(p+1)$. Здесь $p=-t_k$, $p=-\bar{t}_k$ – нули функции $\overline{K}(p,\alpha)$ ($0<\mathrm{Re}\,t_k<\mathrm{Re}\,t_{k+1}$), а $t_1=1\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, для $\overline{\tau}_1^-(p+1)$ можем записать

$$\overline{\tau}_1^-(p+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_{-1}^{(k)}b_n^{(k)}}{p+t_k+n-1}+\frac{B_{-1}^{(k)}\tilde{b}_n^{(k)}}{p+\bar{t}_k+n-1}\right]$$

$$A_{-1}^{(k)}=\operatorname*{Res}_{p=-t_k}s\,\overline{\tau}_1^-(p+1),\quad B_{-1}^{(k)}=\operatorname*{Res}_{p=-\bar{t}_k}s\,\overline{\tau}_1^-(p+1) \tag{15}$$

$$A_{-n}^{(k)}=\operatorname*{Res}_{p=-t_k-n+1}s\,\overline{\tau}_1^-(p+1)=A_{-1}^{(k)}b_n^{(k)},\quad B_{-n}^{(k)}=\operatorname*{Res}_{p=-\bar{t}_k-n+1}s\,\overline{\tau}_1^-(p+1)=B_{-1}^{(k)}\tilde{b}_n^{(k)}$$

$$b_n^{(k)}=(-\lambda)^{n-1}\prod_{l=2}^{n}\frac{\overline{K}^{-1}(-t_k-l+1,\alpha)}{-t_k-l+2},\qquad b_1^{(k)}=1$$

$$\tilde{b}_n^{(k)}=(-\lambda)^{n-1}\prod_{l=2}^{n}\frac{\overline{K}^{-1}(-\bar{t}_k-l+1,\alpha)}{-\bar{t}_k-l+2},\qquad \tilde{b}_1^{(k)}=1,\quad \tilde{b}_n^{(1)}=0$$

Тогда, $\overline{\varphi}^-(p+1)$ в силу вышеизложенного можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}^-(p+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\Bigg[&\frac{-t_k-n+1}{-t_k-n+2}\frac{\overline{L}^+(-t_k-n+1)}{\overline{Q}^+(-t_k-n+1)}\frac{A_{-1}^{(k)}b_{n-1}^{(k)}}{p+t_k+n-1}+\\&+\frac{-\bar{t}_k-n+1}{-\bar{t}_k-n+2}\frac{\overline{L}^+(-\bar{t}_k-n+1)}{\overline{Q}^+(-\bar{t}_k-n+1)}\frac{B_{-1}^{(k)}\tilde{b}_{n-1}^{(k)}}{p+\bar{t}_k+n-1}\Bigg]+\\&+\frac{(-1)}{p+1}\frac{\overline{L}^+(-1)}{\overline{Q}^+(-1)}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{A_{-1}^{(k)}b_{n-1}^{(k)}}{t_k+n-2}+\frac{B_{-1}^{(k)}\tilde{b}_{n-1}^{(k)}}{\bar{t}_k+n-2}\right]\end{aligned} \tag{16}$$

Далее, применив теорему о вычетах к $K_3^-\left(\dfrac{r}{t}\right)$ и применяя преобразование Меллина на $\psi_1^-(r)$, а также имея в виду, что $\overline{f}^+(p+1)\sim|p|^{-\frac{1}{2}}$, $\overline{f}^-(p+1)\sim|p|^{-1}$ при $|p|\to\infty$ в своих областях регулярности, для $\overline{f}^-(p+1)$ получим

$$\overline{f}^-(p+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-s_k)}{p+s_k}\frac{\overline{L}^+(-s_k)}{\overline{Q}^+(-s_k)}D_k\int_{b_1}^{c_1}t^{-s_k}\tau_2(t)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\bar{s}_k)}{p+\bar{s}_k}\frac{\overline{L}^{*}(-\bar{s}_k)}{\overline{Q}^{*}(-\bar{s}_k)}\widetilde{D}_k\int_{b_1}^{c_1}t^{-\bar{s}_k}\tau_2(t)dt \tag{17}$$

$$D_k=\frac{\sin 2s_k\alpha\cos 2\alpha - s_k\sin 2\alpha\cos 2s_k\alpha}{2(\alpha\sin 4s_k\alpha - s_k\sin^2 2\alpha)}$$

$$\widetilde{D}_k=\frac{\sin 2\bar{s}_k\alpha\cos 2\alpha - \bar{s}_k\sin 2\alpha\cos 2\bar{s}_k\alpha}{2(\alpha\sin 4\bar{s}_k\alpha - \bar{s}_k\sin^2 2\alpha)}$$

здесь $s_k$ – нули функции $\sin^2 2p\alpha - p^2\sin^2 2\alpha$, для которых $\mathrm{Re}\, s_k > 0$, $\mathrm{Im}\, s_k \ge 0$, $\mathrm{Re}\, s_k < \mathrm{Re}\, s_{k+1}$, $\bar{s}_k$ – сопряженное к $s_k$, а $b_1=\dfrac{b}{a}$ и $c_1=\dfrac{c}{a}$.

Имея в виду условие контакта при $\varphi=-\alpha$, из (3) и (8) получим

$$-\frac{1}{E_1 h}\int_r^{c_1}\tau_2(t)dt=\frac{2}{Ea}\int_{b_1}^{c_1}\tau_2(t)K_4\left(\frac{r}{t}\right)\frac{dt}{t}+\frac{2}{Ea}\int_0^1\tau_1^-(t)K_3\left(\frac{r}{t}\right)\frac{dt}{t} \tag{18}$$

где $\tau_2(t)=\tau_{(2)}(at)$, $\tau_1^-(t)=\tau_{(1)}^-(at)$.

Из (15) для $\tau_1^-(t)$ получим

$$\tau_1^-(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{-1}^{(k)}b_n^{(k)}t^{t_k+n-2}+B_{-1}^{(k)}\widetilde{b}_n^{(k)}t^{\bar{t}_k+n-2}\right)$$

Теперь, подставляя $\tau_1^-(t)$ в (18), произведя замену переменных $t^{\frac{\pi}{2\alpha}}=t_0$, $r^{\frac{\pi}{2\alpha}}=r_0$, $c_1^{\frac{\pi}{2\alpha}}=c_0$, $b_1^{\frac{\pi}{2\alpha}}=b_0$, после некоторых преобразований получим

$$-\lambda r_0^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}\int_{r_0}^{c_0}\tau_2^*(t_0)dt_0=\frac{1}{2\alpha}\int_{b_0}^{c_0}\frac{\tau_2^*(t_0)}{t_0-r_0}dt_0+\int_{b_0}^{c_0}\tau_2^*(t_0)K^{**}\left(\frac{r_0}{t_0}\right)dt_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{-1}^{(k)}L_k(r_0)+B_{-1}^{(k)}\widetilde{L}_k(r_0)\right) \tag{19}$$

$$\tau_2^*(t_0)=t_0^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}\tau_2(t_0^{\frac{2\alpha}{\pi}}),\quad L_k(r_0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{(k)}\int_0^1(r_0t_0)^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}t_0^{\frac{2\alpha}{\pi}(t_k+n-3)}K_3\left[\left(\frac{r_0}{t_0}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}\right]dt_0$$

$$K^{**}\left(\frac{r_0}{t_0}\right)=\frac{1}{r_0}\left(\frac{r_0}{t_0}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}K^*\left[\left(\frac{r_0}{t_0}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}\right]$$

$$K^*\left(\frac{r_0}{t_0}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\overline{K}(p,\alpha)-\mathrm{ctg}2p\alpha\right)\left(\frac{r_0}{t_0}\right)^{-\frac{2\alpha}{\pi}(p+1)}dp$$

$\widetilde{L}_k(r_0)$ получается из $L_k(r_0)$, если вместо $b_n^{(k)}$ положить $\widetilde{b}_n^{(k)}$ и вместо $t_k$ положить $\bar{t}_k$.

$\tau_2^*(t_0)$ ищем в виде [2]

$$\tau_2^*(u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\sum_{j=0}^{\infty}X_j^*T_j(u),\qquad (|u|<1) \tag{20}$$

$u = \dfrac{2t_0 - b_0 - c_0}{c_0 - b_0}$, $\{T_j(u)\}_{j=0}^{\infty} = \{\cos(j\arccos u)\}_{j=0}^{\infty}$ – многочлены Чебышева первого рода, а неизвестные коэффициенты $\{X_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ подлежат определению.

Подставим теперь выражение $\tau_2^*(u)$ в (19) и в $\overline{f}^{-}(p+1)$, а затем, аналогично [2], умножая (19) на $\sqrt{1-v^2}\,U_{m-1}(v)dv$ и интегрируя с -1 до 1, из (14), при этом имея в виду (16), (17), получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_m^* + \sum_{j=1}^{\infty} B_{jm} X_j^* + \sum_{k=1}^{\infty}\left(B_{mk}^{(1)} A_{-1}^{(k)} + B_{mk}^{(2)} B_{-1}^{(k)}\right) = X_0^* \beta_m, \qquad (m = 1,2,\ldots) \quad (21)$$

$$A_{-1}^{(1)} - \lambda d_0 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{A_{-1}^{(k)} b_{n-1}^{(k)}}{t_k + n - 2} + \frac{B_{-1}^{(k)} \widetilde{b}_{n-1}^{(k)}}{\overline{t}_k + n - 2}\right] = 0 \quad (22)$$

$$A_{-1}^{(m)} + \lambda \frac{\overline{K}_1^{+}(-t_m)}{\overline{K}_1'(-t_m)} \sum_{k=1}^{\infty}\left(R_{mk}^{(1)} A_{-1}^{(k)} + R_{mk}^{(2)} B_{-1}^{(k)}\right) + \frac{\overline{K}_1^{+}(-t_m)}{\overline{K}_1'(-t_m)} \sum_{j=1}^{\infty} J_{mj} X_j^* =$$

$$= \frac{\overline{K}_1^{+}(-t_m)}{\overline{K}_1'(-t_m)} a_1 + \frac{\overline{K}_1^{+}(-t_m)}{\overline{K}_1'(-t_m)} X_0^* J_{m0} \quad (23)$$

$$B_{-1}^{(m)} + \lambda \frac{\overline{K}_1^{+}(-\overline{t}_m)}{\overline{K}_1'(-\overline{t}_m)} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\widetilde{R}_{mk}^{(1)} A_{-1}^{(k)} + \widetilde{R}_{mk}^{(2)} B_{-1}^{(k)}\right) + \frac{\overline{K}_1^{+}(-\overline{t}_m)}{\overline{K}_1'(-\overline{t}_m)} \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{J}_{mj} X_j^* =$$

$$= \frac{\overline{K}_1^{+}(-\overline{t}_m)}{\overline{K}_1'(-\overline{t}_m)} a_1 + \frac{\overline{K}_1^{+}(-\overline{t}_m)}{\overline{K}_1'(-\overline{t}_m)} X_0^* \widetilde{J}_{m0} \quad (24)$$

$$\frac{Q}{a} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_{-1}^{(k)} b_n^{(k)}}{t_k + n - 1} + \frac{B_{-1}^{(k)} \widetilde{b}_n^{(k)}}{\overline{t}_k + n - 1}\right]$$

где

$$B_{jm} = \frac{2(c_0 - b_0)\alpha}{\pi^2}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K^{**}\left(\frac{u}{v}\right)\frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-u^2}} T_j(u) U_{m-1}(v)\,du\,dv + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{j}\int_{-1}^{1}\left(\frac{(c_0 - b_0)v + c_0 + b_0}{2}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}-1} \sin(j\arccos v)\sqrt{1-v^2}\,U_{m-1}(v)dv\right]$$

$$B_{mk}^{(1)} = \frac{2(c_0 - b_0)\alpha}{\pi^2}\int_{-1}^{1} L_k(v)\sqrt{1-v^2}\,U_{m-1}(v)dv$$

$$B_{mk}^{(2)} = \frac{2(c_0 - b_0)\alpha}{\pi^2}\int_{-1}^{1} \widetilde{L}_k(v)\sqrt{1-v^2}\,U_{m-1}(v)dv$$

$$\beta_m = \frac{2(c_0 - b_0)\alpha}{\pi^2}\left[-\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{(c_0 - b_0)v + c_0 + b_0}{2}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}-1} \arccos v\sqrt{1-v^2}\,U_{m-1}(v)dv - \right.$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K^{-}\left(\frac{u}{v}\right)\frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-u^2}}U_{n-1}(v)dv\Bigg]$$

$$J_{k0}^{(1)}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{(c_0-b_0)u+c_0+b_0}{2}\right)^{-\frac{2\alpha}{\pi}s_k}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\widetilde{J}_{k0}^{(1)}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{(c_0-b_0)u+c_0+b_0}{2}\right)^{-\frac{2\alpha}{\pi}\bar{s}_k}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},\quad (j=0)$$

$$J_{kj}^{(1)}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{(c_0-b_0)u+c_0+b_0}{2}\right)^{-\frac{2\alpha}{\pi}s_k}\frac{T_j(u)du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\widetilde{J}_{kj}^{(1)}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{(c_0-b_0)u+c_0+b_0}{2}\right)^{-\frac{2\alpha}{\pi}\bar{s}_k}\frac{T_j(u)du}{\sqrt{1-u^2}},\quad (j=1,2,\ldots)$$

$$R_{mk}^{(1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-t_k-n+1}{-t_k-n+2}\frac{\overline{L}^{+}(-t_k-n+1)}{\overline{Q}^{+}(-t_k-n+1)}\frac{1}{-t_m+t_k+n-1}b_{n-1}^{(k)}+$$

$$+\frac{1}{t_m-1}\frac{\overline{L}^{+}(-1)}{\overline{Q}^{+}(-1)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{t_k+n-2}b_{n-1}^{(k)}$$

$$\widetilde{R}_{mk}^{(1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-t_k-n+1}{-t_k-n+2}\frac{\overline{L}^{+}(-t_k-n+1)}{\overline{Q}^{+}(-t_k-n+1)}\frac{1}{-\bar{t}_m+t_k+n-1}b_{n-1}^{(k)}+$$

$$+\frac{1}{\bar{t}_m-1}\frac{\overline{L}^{+}(-1)}{\overline{Q}^{+}(-1)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{t_k+n-2}b_{n-1}^{(k)}$$

$$J_{mj}=\frac{(c_0-b_0)\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{s_k}{t_m-s_k}\frac{\overline{L}^{+}(-s_k)}{\overline{Q}^{+}(-s_k)}D_k J_{kj}^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{s}_k}{t_m-\bar{s}_k}\frac{\overline{L}^{+}(-\bar{s}_k)}{\overline{Q}^{+}(-\bar{s}_k)}\overline{D}_k\widetilde{J}_{kj}^{(1)}\right)\qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

$$d_0=\frac{\sin 4\alpha-4\alpha\cos 4\alpha}{4(\sin^2 2\alpha-\alpha\sin 4\alpha)},\quad \overline{K}_1(p)=p\overline{K}(p),\quad \overline{K}_1'(p)=\frac{d\overline{K}_1(p)}{dp}$$

выражения $R_{mk}^{(2)},\widetilde{R}_{mk}^{(2)}$ получаются из $R_{mk}^{(1)},\widetilde{R}_{mk}^{(1)}$, если в них вместо $t_k$ положить $\bar{t}_k$, а $\widetilde{J}_{mj}$ – из $J_{mj}$, если в нем вместо $t_m$ положить $\bar{t}_m$.

Оказывается, что имеют место следующие оценки :

$$\left|\frac{\overline{K}_1^{+}(-t_m)}{\overline{K}_1'(-t_m)}\right|\le\frac{C_1}{\sqrt{|t_m|}},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|R_{mk}^{(1)}\right|<\frac{C_2}{m},\quad \sum_{j=1}^{\infty}\left|B_{mj}\right|<\frac{C_3}{\sqrt{m}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|B_{mk}^{(1)}\right|<\frac{C_4}{\sqrt{t_m}},\quad \sum_{j=1}^{\infty}\left|J_{mj}\right|<\infty\quad \text{при}\quad m\to\infty.$$

Имея в виду эти оценки, нетрудно убедиться, что (21)-(24) квазивполне регулярные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно вычетов трансформантов Меллина интенсивности контактных напряжений $\tau_1^-(r)$ и относительно коэффициентов разложения Чебышева $\tau_2(r)$ в случае, когда $a < b$.

В заключение отметим, что решение задачи для клина, когда оба стрингера подкреплены к одной грани клина, можно получить аналогичным образом.

Авторы благодарят Э.Х. Григоряна за ценные советы и постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Григорян Э.Х. Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение. -Уч. записки ЕГУ, 1982, №2, с. 38-44.
2. Григорян Э.Х. Контактная задача для кусочно-однородной бесконечной пластины с конечными стрингерами. -Уч. записки ЕГУ, 1988, №3, с. 48-57.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. -Л.: Наука, 1968.
4. Нобль Б. Метод Винера-Хопфа. -М.: ИЛ, 1962.
5. Григорян Э.Х. Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.-Межвуз. сб. "Механика", 1987, №6, с. 127-133.


Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
23.12.1996