

УДК 539.374

СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
 ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ЛИНЕЙНО-  
 ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО  
 СДВИГА

Акопян А.С.<sup>1)</sup>, Киракосян Р.М.<sup>2)</sup>

Ա.Ս. Հակոբյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Գծայնորեն վաղիտիական հաստորյան օրթոտրոպ օղակաձև սալի առանցքասիճներով  
 սատարունները բնդայնական սահյի հաշվածամը

Սալերի [1] ճշգրտված տեսության հիման վրա առաջվել է գծայնորեն վաղիտիական հաստորյան օրթոտրոպ օղակաձև սալի առանցքասիճներով սպասատանտունների դիֆերենցիալ հավասարումը: Բնդայնորեն սահյի հաշվածամը: Սալի սահյիական հանդիտությունների որոշման համար օգտագործվել է կոլոկացիաների մեթոդը՝ սնհայտ: Հանկելյան վերածելով ետանկունայական շարքի: ճվային լաշվարկները կարարվել են սալի երկրայական և մեխանիկական պարամետրերի մի քանի բուորոշ արմերների համար: Վերջնական արդյունքների վերամտան հիման վրա արվել են որակական եզրակացություններ բնդայնական սալերի սղիկտրյան վերաբերյալ:

A.S. Hakobian, R.M. Kirakosian

The free axis symmetrical oscillations of orthotropic circular plates of linear variable thickness with calculation cross displacements

На основе уточненной теории пластин [1] получено дифференциальное уравнение свободных осесимметричных колебаний ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетом поперечного сдвига. Для определения собственных частот пластинки применен метод коллокаций. Разложив неизвестную функцию в тригонометрический ряд. Численные расчеты проводились для некоторых характерных значений геометрических и механических параметров пластинки. На основе анализа окончательных результатов сделаны качественные заключения о влиянии поперечного сдвига.

1. Рассмотрим ортотропную кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами  $a$  и  $b$ , толщина которой  $h$  меняется по закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad h_1 > -\frac{h_0}{b}, \quad a \leq r \leq b \quad (1.1)$$

Здесь  $r$  — радиальная координата,  $h_0$  и  $h_1$  — геометрические параметры пластинки. Пусть осесимметричным поперечным возмущением пластинка выведена из состояния равновесия и оставлена самой себе. Исследуем возникающие свободные колебания при заданных условиях опирания пластинки с учетом влияния деформаций поперечных сдвигов. Аналогичная задача в классической постановке для изотропной пластинки рассмотрена в работе [2].

Введем обозначения:

$$r = \rho b, \quad z = h_0 \delta, \quad \frac{h_0}{b} = s, \quad \frac{h_1}{s} = \gamma, \quad \frac{a}{b} = k, \quad h = h_0 H, \quad \frac{B_0}{B_r} = m^2, \quad a_r B_r = \chi$$

1) При поддержке Американского Университета Армении.

2) При спонсорстве общества с ограниченной ответственностью "Алушик".

$$\frac{dh_n^2 \omega_n^2}{B_r} = \Omega_n^2, \quad u_r = h_0 u, \quad w = h_0 f \cos \omega_n t, \quad \varphi_1 = B_r \varphi \cos \omega_n t, \quad \frac{df}{d\rho} = \alpha$$

$$s\alpha - \chi\varphi = y, \quad N_r = B_r h_0 \bar{N}_r \cos \omega_n t, \quad M_r = B_r h_n^2 \bar{M}_r \cos \omega_n t \\ M_0 = B_r h_0^2 \bar{M}_0 \cos \omega_n t \quad (1.2)$$

Здесь  $t$  — время,  $\delta$  и  $\rho$  — поперечная и радиальная безразмерные координаты;  $d$  — плотность;  $B_0, B_r, a_r$  — механические параметры материала [3];  $w$  — прогиб;  $\varphi_1$  — функция, описывающая распределение по толщине поперечного сдвига [1],  $M_r, M_0$  и  $N_r$  — изгибающие моменты и поперечная сила,  $\omega_n$  — круговая частота собственных колебаний пластинки.

С учетом (1.1) и (1.2) находим

$$H = 1 + \gamma\rho, \quad u = -\delta y \quad (1.3)$$

$$\bar{N}_r = \frac{H}{12} \left[ 8\varphi - s^2 \gamma H \left( \frac{dy}{d\rho} + v_{r0} m^2 \frac{y}{\rho} \right) \right] \quad (1.4)$$

$$\bar{M}_r = -\frac{sH^3}{12} \left( \frac{dy}{d\rho} + v_{r0} m^2 \frac{y}{\rho} \right) \quad (1.5)$$

$$\bar{M}_0 = -\frac{sm^2 H^3}{12} \left( v_{r0} \frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho} \right) \quad (1.6)$$

где  $v_{r0}$  — соответствующий коэффициент Пуассона материала.

Известно [3], что уравнения свободных колебаний пластинки при пренебрежении инерцией вращения и тангенциальных перемещений можно получить из соответствующих уравнений изгиба, заменив интенсивность поперечной распределенной нагрузки выражением

$$Z = -dh \frac{d^2 w}{dt^2} \quad (1.7)$$

Имея в виду это обстоятельство и осесимметричность колебаний, третье и четвертое уравнения движения дифференциального элемента срединной плоскости пластинки представим в виде

$$\frac{d\bar{N}_r}{d\rho} + \frac{\bar{N}_r}{\rho} + \frac{Hf}{s} \Omega_n^2 = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{d\bar{M}_r}{d\rho} + \frac{\bar{M}_r - \bar{M}_0}{\rho} - \frac{\bar{N}_r}{s} = 0 \quad (1.9)$$

Подставив выражения  $\bar{N}_r, \bar{M}_r$  и  $\bar{M}_0$  из (1.4)–(1.6) в уравнение (1.9), для функции  $\varphi$  получим

$$\varphi = -\frac{s^2 H}{8} \left[ H \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left( 2\gamma + \frac{H}{\rho} \right) \frac{dy}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho} \left( 2v_{r0} \gamma - \frac{H}{\rho} \right) y \right] \quad (1.10)$$

С учетом (1.4), (1.9) и (1.10) из уравнения (1.8) следует:

$$f = \frac{s^1}{12\Omega_n^2} \left[ H^2 \frac{d^3 y}{d\rho^3} + 2H \left( 3\gamma + \frac{H}{\rho} \right) \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left( 6\gamma^2 + 6 \frac{\gamma H}{\rho} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3v_{r0} \gamma m^2 \frac{H}{\rho} - m^2 \frac{H^2}{\rho^2} \right) \frac{dy}{d\rho} + m^2 \left( 6v_{r0} \gamma^2 + \frac{H^2}{\rho^2} - 3 \frac{\gamma H}{\rho} \right) \frac{y}{\rho} \right] \quad (1.11)$$

Используя (1.10) и (1.11), уравнение

$$s \frac{df}{d\rho} - \chi\varphi = \gamma \quad (1.12)$$

можно привести к виду

$$\frac{d^4 y}{d\rho^4} + A \frac{d^3 y}{d\rho^3} + B \frac{d^2 y}{d\rho^2} + C \frac{dy}{d\rho} + Dy = 0 \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{H} \left( 4\gamma + \frac{H}{\rho} \right) \\ B &= \frac{i}{H^2} \left( 12\gamma^2 + 10 \frac{\gamma H}{\rho} - 2 \frac{H^2}{\rho^2} - \frac{m^2 H^2}{\rho^2} + 3v_{r0} \gamma m^2 \frac{H}{\rho} + \frac{3\chi H^2 \Omega_n^2}{2s^2} \right) \\ C &= \frac{1}{\rho H^2} \left[ 6\gamma^2 - 6 \frac{\gamma H}{\rho} + 9v_{r0} m^2 \gamma^2 - \frac{3v_{r0} \gamma m^2 H^2}{\rho} - \frac{5\gamma m^2 H}{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3m^2 H^2}{\rho^2} + \frac{3\chi H \rho \Omega_n^2}{2s^2} \left( 2\gamma + \frac{H}{\rho} \right) \right] \\ D &= \frac{m^2}{H^2 \rho^2} \left\{ \frac{8\gamma H}{\rho} - \frac{3H^2}{\rho^2} - 3\gamma^2 - 6v_{r0} \gamma^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12\rho \Omega_n^2}{s^4} \left[ \frac{\chi H s^2}{8} \left( 2v_{r0} \gamma - \frac{H}{\rho} \right) - \frac{\rho}{m^2} \right] \right\} \quad (1.14) \end{aligned}$$

Будем считать, что краевые условия на внутреннем и внешнем контурах пластинки  $\rho = k$  и  $\rho = 1$  произвольны. Они могут быть сформулированы в виде любой возможной комбинации следующих условий:

а) Условия свободного края:

$$\frac{dy}{d\rho} + v_{r0} m^2 \frac{y}{\rho} = 0, \quad (M_r = 0)$$

$$\rho v_{r0} \frac{d^2 y}{d\rho^2} + (1 + v_{r0}) \frac{dy}{d\rho} = 0, \quad (N_r = 0) \quad (1.15)$$

б) Условия шарнирного опирания:

$$\frac{dy}{d\rho} + v_{r0} m^2 \frac{y}{\rho} = 0, \quad (M_r = 0)$$

$$\begin{aligned} H \frac{d^3 y}{d\rho^3} + 2 \left( 3\gamma + \frac{H}{\rho} \right) \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho v_{r0}} \left[ 3\gamma (1 + 2v_{r0} + v_{r0}^2 m^2) - \right. \\ \left. - \frac{H}{\rho} (1 + v_{r0} m^2) \right] \frac{dy}{d\rho} = 0, \quad (w = 0) \quad (1.16) \end{aligned}$$

в) Условия заделки:

$$y = 0, \quad (u_r = 0)$$

$$H^2 \frac{d^3 y}{d\rho^3} + 2H \left( 3\gamma + \frac{H}{\rho} \right) \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left[ 6\gamma^2 + \frac{3\gamma H}{\rho} (2 + v_{r0} m^2) - \right.$$

$$-\frac{m^2 H^2}{\rho^2} \left] \frac{dy}{d\rho} = 0 \quad (y=0) \quad (1.17)$$

Докажем, что собственные числа краевой задачи для однородного дифференциального уравнения (1.13) являются круговыми частотами свободных колебаний пластинки при соответствующих условиях крепления и что пластинка других частот не имеет. Очевидно, что для этого достаточно показать, что из условия  $y \neq 0$  вытекает условие  $f \neq 0$  ( $\omega \neq 0$ ), а из условия  $y = 0$  — условие  $f = 0$  ( $\omega = 0$ ). Рассмотрим эти два утверждения в отдельности.

Сначала докажем, что при  $y \neq 0$  имеет место  $f \neq 0$ . Допустим обратное, то есть  $f = 0$ . Тогда  $df/d\alpha = 0$  и из (1.12) следует  $\phi \neq 0$ , что означает  $\tau_{rz} \neq 0$ . Это противоречит физическому смыслу задачи, поскольку получится, что при отсутствии прогибов (изгиба) возникает поперечное касательное напряжение. Следовательно, обратное допущение неверно и при  $y \neq 0$  справедливо  $f \neq 0$ .

Доказательство же другого утверждения, согласно которому при  $y = 0$  имеет место равенство  $f = 0$ , непосредственно вытекает из (1.11).

Таким образом, нахождение круговых частот собственных колебаний ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетом влияния деформации поперечного сдвига сводится к решению задачи о собственных числах  $\Omega_n$  соответствующей краевой задачи для однородного дифференциального уравнения (1.13).

2. Для нахождения частот свободных колебаний пластинки  $\Omega_n$  удобно пользоваться методом коллокаций, решение дифференциального уравнения (1.13) представив в усеченный тригонометрический ряд

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^N \left( a_i \cos \frac{\pi i \rho}{1-k} + b_i \sin \frac{\pi i \rho}{1-k} \right) \quad (2.1)$$

Здесь  $a_i$  и  $b_i$  — неизвестные коэффициенты.

В нижеприведенных таблицах представлены столкратно увеличенные безразмерные значения частот первых двух осесимметричных форм колебаний пластинки, внутренний край которой  $\rho = k$  свободен, а внешний край  $\rho = 1$  — шарнирно оперт. Эти значения найдены с точностью до четырех значащих цифр, для чего понадобилось удерживать 31 член ряда (2.1). Рассмотрены случаи некоторых характерных значений механико-геометрических параметров пластинки  $E_0/E_r$ ,  $\chi$ ,  $k$ ,  $\gamma$  и  $s$ . В последних двух строках таблиц приведены поправки в процентах

$$\Delta_n = \frac{\Omega_n^{ка} - \Omega_n}{\Omega_n^{ка}} 100\%, \quad (n=1,2) \quad (2.2)$$

вносимые в значения частот свободных колебаний пластинки с учетом поперечного сдвига. Через  $\Omega_n^{ка}$  обозначены частоты, соответствующие классической постановке задачи, то есть случаю  $\chi = 0$ .

Данные таблиц приводят к следующим заключениям.

1. Учет влияния поперечного сдвига, как и следовало ожидать, и в случае пластин переменной толщины приводит к уменьшению значений собственных частот.

2. Величина поправки существенным образом зависит от поведения изменения относительной толщины пластинки, то есть от значений параметров  $s$  и  $\gamma$ . С ростом этих величин поправка увеличивается.

Таблица 1

$k = 0.2, \nu_{r0} = 0.3, E_0 = 0.5E_r$							
		$s = 0.05$				$s = 0.3$	
		$\gamma = 0$		$\gamma = 1$		$\gamma = -0.5$	
		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
$\chi$	0	2.14	6.09	3.57	9.82	6.45	5.09
	5	2.11	5.77	3.42	8.66	6.30	4.04
	10	2.07	5.50	3.29	7.83	6.15	3.46
$\Delta_1$		1.72	5.19	4.21	11.9	2.25	20.5
$\Delta_2$		3.36	9.66	7.95	20.3	4.63	32.1
$k = 0.2, \nu_{r0} = 0.3, E_0 = E_r$							
$\chi$	0	2.27	6.19	3.70	9.93	8.78	55.1
	5	2.22	5.86	3.54	8.73	8.37	42.6
	10	2.18	5.58	3.39	7.88	8.02	36.0
$\Delta_1$		1.89	5.33	4.52	12.1	4.63	22.6
$\Delta_2$		3.70	9.89	8.52	20.6	8.67	34.7
$k = 0.2, \nu_{r0} = 0.3, E_0 = 2E_r$							
$\chi$	0	2.48	6.38	3.95	10.1	11.7	62.3
	5	2.43	6.03	3.75	8.87	10.8	45.9
	10	2.37	5.72	3.57	7.98	10.0	38.0
$\Delta_1$		2.28	5.59	5.18	12.5	7.95	26.3
$\Delta_2$		4.41	10.3	9.68	21.2	14.3	39.0
$k = 0.1, \nu_{r0} = 0.3, E_0 = 0.5E_r$							
$\chi$	0	1.94	5.17	3.09	8.04	7.11	48.2
	5	1.90	4.94	2.97	7.25	6.88	38.0
	10	1.87	4.73	2.87	6.66	6.67	32.3
$\Delta_1$		1.66	4.55	3.76	9.79	3.19	21.2
$\Delta_2$		3.26	8.53	7.14	17.2	6.16	32.9
$k = 0.1, \nu_{r0} = 0.3, E_0 = E_r$							
$\chi$	0	2.12	5.40	3.28	8.31	9.19	54.0
	5	2.07	5.14	3.14	7.46	8.69	40.7
	10	2.03	4.91	3.01	6.82	8.27	34.0
$\Delta_1$		1.99	4.90	4.34	10.3	5.35	24.6
$\Delta_2$		3.88	9.14	8.18	18.0	9.96	37.0
$k = 0.1, \nu_{r0} = 0.3, E_0 = 2E_r$							
$\chi$	0	2.39	5.80	3.59	8.81	11.8	62.1
	5	2.33	5.48	3.40	7.82	10.8	44.0
	10	2.27	5.21	3.23	7.10	9.98	35.9
$\Delta_1$		2.55	5.56	5.39	11.2	8.62	29.2
$\Delta_2$		4.92	10.3	10.0	19.4	15.3	42.2

3. Поправка зависит от характера анизотропии материала. Как и следовало ожидать, она возрастает с уменьшением относительного модуля сдвига материала поперечного направления (с увеличением параметра  $\chi$ ). Величина поправки сильно зависит еще и от анизотропии материала в плоскости пластинки. Причем с ростом отношения модулей упругости кольцевого и радиального направлений  $E_\theta / E_r$ , она увеличивается.

4. Уменьшение радиуса внутреннего края пластинки приводит к уменьшению значений собственных частот.

5. Учет влияния поперечного сдвига на значения второй частоты сказывается качественно одинаково, но намного сильнее, чем на значения первой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. -Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
2. Соли С., Аллба-Рао Ч. Осесимметричные колебания кольцевых пластинок переменной толщины.-В сб.: Механика, колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем. М.: Изд. Мир, 1984, в. 32, с. 7-16.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Наука, 1987. 360с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
1.09.1995