ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КРУГОВОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Макарян В.С., Симонян В.В.

Վ.Ս. Մակարյան, Վ.Վ. Սիմոնյան
Վերջավոր երկարությամբ առաձգական գլանի համար մի դինամիկ խնդիր

Վերջավոր երկարությամբ առաձգական գլանը, որը ամրակցված է կոշտ հենարանի հետ, բեռնավորված է հարմոնիկ բեռով: Խնդրի լուծումը փնտրված է Հնլմհոլցի ֆունկցիաների օգնությամբ և բերված է քվազի-լիովին ռեգուլյար անվերջ համակարգերի լուծման:

V.S. Makarian, V.V. Simonian
On a dynamic problem for a circular elastic cylinder of finite length

Рассматривается задача об установившихся колебаниях упругого цилиндра конечной длины под действием осесимметричной динамической нагрузки, приложенной на его верхнем торце. Решение задачи сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, которые квазивполне регулярны.

Пусть упругий цилиндр совершает вынужденные колебания под действием периодически изменяющейся во времени нагрузки, приложенной к верхнему торцу цилиндра. Частотой колебания ω приложенной силы колеблется и основание цилиндра. При совпадении частоты колебания приложенной силы с частотами собственных колебаний ω_0 возникает необходимость дополнительных исследований [3] .Здесь рассматривается случай, когда указанные частоты не совпадают.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

$$\sigma_z(r,h,t)=f(r)e^{-i\omega t};\qquad \tau_{rz}(r,h,t)=0\qquad (0<r<R)$$
$$\tau_{rz}(R,z,t)=0;\quad \sigma_r(R,z,t)=0\qquad (0<z<h)$$
$$u_r(r,0,t)=0;\ u_z(r,0,t)=ke^{-i\omega t}\qquad (0<r<R)\tag{1}$$

где $f(r)$ -интегрируемая функция, h -высота цилиндра, R -радиус цилиндра, k -амплитуда колебаний основания.

Компоненты вектора перемещения будем определять по формулам

$$u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial\Psi}{\partial z},\quad u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\Psi}{r}\tag{2}$$

Функции Φ и Ψ удовлетворяют уравнениям [3]

$$\nabla_0^2\Phi=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\quad \nabla_1^2\Psi=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\tag{3}$$

где c_1 и c_2 — скорости продольных и поперечных волн соответственно, а

$$\nabla_0^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};\qquad \nabla_1^2=\nabla_0^2-\frac{1}{r^2}\tag{4}$$

r,z — цилиндрические координаты.

Решение уравнений (3) ищем в виде:

$$\Phi(r,z) = A_0 \sin a(h-z) + B_0 \cos a(h-z) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + B_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right)J_0\left(\mu_k r\right) + \sum_{p=1}^{\infty} C_p I_0\left(\beta_p r\right)\sin\lambda_p z \qquad (5)$$

$$\Psi(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(E_k \operatorname{ch}\gamma_k z + F_k \operatorname{sh}\gamma_k z\right)J_1\left(\mu_k r\right) + \sum_{k=1}^{\infty} H_p I_1\left(d_p r\right)\cos\lambda_p z \qquad (6)$$

где $J_i(x)$ и $I_i(x)$ $(i = 0,1)$ – функции Бесселя первого рода от действительного и мнимого аргументов соответственно. $A_0, B_0, A_k, B_k, C_k, D_k, E_k$ и F_k – неизвестные постоянные.

В формулах (5) и (6) приняты также обозначения

$$\alpha_k = \sqrt{\mu_k^2 - a^2}; \qquad \beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 - a^2}; \qquad (7)$$

$$\gamma_k = \sqrt{\mu_k^2 - b^2}; \qquad d_k = \sqrt{\lambda_k^2 - b^2}; \quad a^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad b^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} \qquad (8)$$

Учитывая представления (5) и (6), а также формулы (2), для перемещений и напряжений получим следующие выражения:

$$u_r = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + B_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right) + \gamma_k\left(E_k \operatorname{sh}\gamma_k z + F_k \operatorname{ch}\gamma_k z\right)\right]J_1\left(\mu_k r\right) +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left[\beta_p I_1\left(\beta_p r\right)C_p + \lambda_p I_1\left(d_p r\right)H_p\right]\sin\lambda_p z$$

$$u_z = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k\left(A_k \operatorname{sh}\alpha_k z + B_k \operatorname{ch}\alpha_k z\right) + \mu_k\left(E_k \operatorname{ch}\gamma_k z + F_k \operatorname{sh}\gamma_k z\right)\right]J_0\left(\mu_k r\right) +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left[\lambda_p I_0\left(\beta_p r\right)C_p + d_p I_0\left(d_p r\right)H_p\right]\cos\lambda_p z -$$

$$-aA_0 \cos a(h-z) + aB_0 \sin a(h-z)$$

$$\sigma_z = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\alpha_k^2 - \nu^*\right)\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + B_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right) +\right.$$

$$\left.+\gamma_k \mu_k\left(E_k \operatorname{sh}\gamma_k z + F_k \operatorname{ch}\gamma_k z\right)\right]J_0\left(\mu_k r\right) -$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left[\left(\lambda_p^2 + \nu^*\right)I_0\left(\beta_p r\right)C_p + \lambda_p d_p I_0\left(d_p r\right)H_p\right]\sin\lambda_p z -$$

$$-\left(a^2 + \nu^*\right)A_0 \sin a(h-z) - \left(a^2 + \nu^*\right)B_0 \cos a(h-z)$$

$$\tau_{rz} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(b^2 + 2\gamma_k^2\right)\left(E_k \operatorname{ch}\gamma_k z + F_k \operatorname{sh}\gamma_k z\right) +\right.$$

$$\left.+2\mu_k \alpha_k\left(A_k \operatorname{sh}\alpha_k z + B_k \operatorname{ch}\alpha_k z\right)\right]J_1\left(\mu_k r\right) +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left[\left(2\lambda_p^2 - b^2\right)I_1\left(d_p r\right)H_p + 2\beta_p \lambda_p I_1\left(\beta_p r\right)C_p\right]\cos\lambda_p z$$

$$\sigma_r = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\nu^* + \mu_k^2\right)\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + \mathrm{B}_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right) +\right.$$

$$+\gamma_k \mu_k\left(B_k \operatorname{sh}\gamma_k z + F_k \operatorname{ch}\gamma_k z\right)\Big]J_0\left(\mu_k r\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k\left(A_k\operatorname{ch}\alpha_k z+B_k\operatorname{sh}\alpha_k z\right)+\gamma_k\left(E_k\operatorname{sh}\gamma_k z+F_k\operatorname{ch}\gamma_k z\right)\right]\frac{J_1(\mu_k r)}{r}+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left\{C_p\left[\left(\beta_p^2-\nu^*\right)I_0(\beta_p r)-\frac{\beta_p I_1(\beta_p r)}{r}\right]+\right.$$

$$\left.+\lambda_p H_p\left[d_p I_0(d_p r)-\frac{I_1(d_p r)}{r}\right]\right\}\sin\lambda_p z-$$

$$-\nu^* A_0\sin a(h-z)-\nu^* B_0\cos a(h-z) \qquad (9)$$

Здесь введено обозначение $\nu^*=\dfrac{\nu b^2}{2(1-\nu)}$; ν-коэффициент Пуассона.

Выбрав значения для λ_k и μ_k следующим образом

$$\lambda_k=\frac{(2k-1)\pi}{2h};\quad J_1(\mu_k R)=0$$

и удовлетворив граничным условиям для касательных напряжений и радиального перемещения, приходим к простым зависимостям между постоянными A_k,B_k,C_k,D_k,E_k и F_k

$$\mu_k A_k+\gamma_k F_k=0$$

$$\left(b^2+2\gamma_k^2\right)\left(E_k\operatorname{ch}\gamma_k h+F_k\operatorname{sh}\gamma_k h\right)+2\mu_k\alpha_k\left(A_k\operatorname{sh}\alpha_k h+B_k\operatorname{ch}\alpha_k h\right)=0 \qquad (10)$$

$$2\beta_k\lambda_k I_1(\beta_k R)C_k=-\left(2\lambda_k^2-b^2\right)I_1(d_k R)H_k$$

Из оставшихся граничных условий для нормальных напряжений и осевого перемещения получаем следующую совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\Omega_m^{(1)}X_m+\Omega_m^{(2)}Y_m=\sum_{p=1}^{\infty}\chi_{mp}^{(1)}\widetilde{H}_p$$

$$\Omega_m^{(3)}X_m+\Omega_m^{(4)}Y_m=\sum_{p=1}^{\infty}\chi_{mp}^{(2)}\widetilde{H}_p+\frac{2}{RJ_0(\mu_m R)}\int_0^R rf(r)J_0(\mu_m r)dr \qquad (11)$$

$$\Omega_m^{(5)}\widetilde{H}_m=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{mk}^{(3)}X_k+\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{mk}^{(4)}Y_k+$$

$$+\nu^* A_0\frac{\left[a(-1)^{m+1}+\lambda_m\sin ah\right]}{\lambda_m^2-a^2}+\frac{\nu^* B_0\lambda_m\cos ah}{\lambda_m^2-a^2}$$

Неизвестные $X_m,Y_m,\widetilde{H}_m$, входящие в системы (11), связаны со старыми неизвестными следующими соотношениями:

$$X_m=\mu_m J_0(\mu_m R)\left[E_m\operatorname{ch}\gamma_m h+F_m\operatorname{sh}\gamma_m h\right]$$

$$Y_m=\frac{\gamma_m}{\mu_m}J_0(\mu_m R)F_m;\quad \widetilde{H}_m=H_m I_1(d_m R) \qquad (12)$$

В системах (12) для краткости введены обозначения:

$$\Omega_m^{(1)}=\frac{1}{\operatorname{ch}\gamma_m h}-\frac{b^2+2\gamma_m^2}{2\mu_m^2\operatorname{ch}\alpha_m h};\ \Omega_m^{(2)}=\alpha_m\operatorname{th}\alpha_m h-\frac{\mu_m^2\operatorname{th}\gamma_m h}{\gamma_m}$$

$$\Omega_m^{(3)} = \gamma_m \operatorname{th}\gamma_m h - \frac{\left(2\mu_m^2 - b^2\right)^2 \operatorname{th}\alpha_m h}{4\mu_m^2 \alpha_m}; \quad \Omega_m^{(4)} = \frac{\mu_m^2}{\operatorname{ch}\gamma_m h} - \frac{\left(\alpha_m^2 - \nu^*\right)}{\operatorname{ch}\alpha_m h}$$

$$\Omega_m^{(5)} = \frac{h}{2}\left[\frac{\lambda_m d_m I_0(d_m R)}{I_1(d_m R)} - \frac{\left(2\lambda_m^2 - b^2\right)^2}{4\beta_m \lambda_m}\frac{I_0(\beta_m R)}{I_1(\beta_m R)} - \frac{b^2}{2\lambda_m R}\right]$$

$$\chi_{mp}^{(1)} = \frac{b^2}{R(1-\nu)} \frac{\left[(1-\nu)\mu_m^2 - \nu b^2\left(\lambda_p^2 - b^2\right)\right]}{\left(\mu_m^2 + \beta_p^2\right)\left(\mu_m^2 + d_p^2\right)}$$

$$\chi_{mp}^{(2)} = \frac{(-1)^{p+1} b^2}{2R(1-\nu)} \frac{\left[\lambda_p^2\left(\nu b^2 - 2\mu_m^2\right) + \nu b^2\left(\mu_m^2 - b^2\right)\right]}{\lambda_p\left(\beta_p^2 + \mu_m^2\right)\left(d_p^2 + \mu_m^2\right)}$$

$$\chi_{mk}^{(3)} = \frac{(-1)^{m+1} b^2}{4(1-\nu)} \frac{\left[\mu_k^2\left(\nu b^2 - 2\lambda_m^2\right) + \nu b^2\left(\lambda_m^2 - b^2\right)\right]}{\mu_k^2\left(\alpha_k^2 + \lambda_m^2\right)\left(\gamma_k^2 + \lambda_m^2\right)}$$

$$\chi_{mk}^{(4)} = \frac{\lambda_m b^2}{2(1-\nu)} \frac{\left[(1-\nu)\mu_k^2 + \nu\left(b^2 - \lambda_m^2\right)\right]}{\left(\gamma_k^2 + \lambda_m^2\right)\left(\alpha_k^2 + \lambda_m^2\right)} \qquad (13)$$

Для неизвестных постоянных A_0 и B_0 из тех же граничных условий для нормального напряжения и осевого перемещения получим следующие значения:

$$\frac{b^2 R B_0}{4} = -\frac{1}{R}\int_0^R r f(r)dr - \frac{\nu^* b^2}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{\beta_p^2 \lambda_p}\widetilde{H}_p$$

$$\frac{aR\cos ahA_0}{2} = -\frac{2\sin ah}{b^2}\left[\frac{1}{R}\int_0^R r f(r)dr + \frac{kR}{2}\right] + \qquad (14)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\widetilde{H}_p}{\beta_p^2\lambda_p}\left[\left(b^2 - 2a^2\right)\lambda_p - 2\nu^*\right]$$

Для исследования разрешимости совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (11) выясним поведение выражений $\Omega_m^{(i)}$ $(i = 1,2,3,4,5)$ когда $m \to \infty$. Асимптотические разложения входящих в них функций позволяют установить следующие оценки:

$$\Omega_m^{(1)} \approx -\frac{1}{2e^m}; \quad \Omega_m^{(2)} \approx -\frac{\left(a^2 + b^2\right)}{2\mu_m}$$

$$\Omega_m^{(3)} \approx \frac{b^2 - a^2}{2\mu_m} + \frac{b^2\left(a^2 - b^2\right)}{4\mu_m^3}; \quad \Omega_m^{(4)} \approx \frac{b^2}{2e^m} \qquad (15)$$

$$\Omega_m^{(5)} \approx -\frac{h\left(a^2 - b^2\right)}{4}\left[1 + \frac{a^2}{\lambda_m R\left(a^2 - b^2\right)}\right] \qquad \text{при } m >> 1$$

Исключив $\widetilde{H}_p$ из системы (11), приходим к следующей системе:

$$\Omega_m^{(1)} X_m + \Omega_m^{(2)} Y_m = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(1)}\chi_{pk}^{(3)}}{\Omega_p^{(5)}} + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(1)}\chi_{pk}^{(4)}}{\Omega_p^{(5)}} +$$

$$+\nu^{*}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi^{(1)}_{mp}}{\Omega^{(5)}_{p}}\left[A_0\frac{a(-1)^{p+1}+\lambda_p\sin ah}{\lambda_p^2-a^2}+B_0\frac{\lambda_p\cos ah}{\lambda_p^2-a^2}\right]$$

$$\Omega^{(3)}_m X_m+\Omega^{(4)}_m Y_m=\sum_{k=1}^{\infty}X_k\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi^{(2)}_{mp}\chi^{(3)}_{pk}}{\Omega^{(5)}_p}+\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi^{(2)}_{mp}\chi^{(4)}_{pk}}{\Omega^{(5)}_p}+ \qquad (16)$$

$$+\nu^{*}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi^{(2)}_{mp}}{\Omega^{(5)}_{p}}\left[A_0\frac{a(-1)^{p+1}+\lambda_p\sin ah}{\lambda_p^2-a^2}+B_0\frac{\lambda_p\cos ah}{\lambda_p^2-a^2}\right]$$

Для исследования регулярности системы (16) следует оценить следующие выражения:

$$Q_1=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi^{(1)}_{mp}\chi^{(3)}_{pk}}{\Omega^{(5)}_p}\right|;\qquad Q_2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi^{(1)}_{mp}\chi^{(4)}_{pk}}{\Omega^{(5)}_p}\right|$$

$$Q_3=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi^{(2)}_{mp}\chi^{(3)}_{pk}}{\Omega^{(5)}_p}\right|;\qquad Q_4=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi^{(2)}_{mp}\chi^{(4)}_{pk}}{\Omega^{(5)}_p}\right| \qquad (17)$$

Исследования показывают, что выражения Q_1 и Q_4 имеют более высокий порядок убывания, чем Q_2 и Q_3, оценки которых через интегралы получим:

$$Q_2\approx\frac{16d^2}{(3-4\nu)\pi^2}\left[1+O\left(m^{-2}\right)\right];\qquad Q_3\approx\frac{4}{\pi^2}\left[1+O\left(m^{-2}\right)\right] \qquad (18)$$

где $$d=d(\nu)=(1-2\nu)\left[\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right]+\sqrt{\nu(1-\nu)} \qquad (19)$$

Отсюда имеем

$$\lim_{m\to\infty}Q_2=\frac{16d^2}{(3-4\nu)\pi^2};\qquad \lim_{m\to\infty}Q_3=\frac{4}{\pi^2} \qquad (20)$$

Нетрудно убедиться, что числа $Q_i(\nu)$; $(i=2,3)$ в зависимости от допустимых значений коэффициента Пуассона меняются в интервале

$$0{,}26\le Q_i(\nu)\le 0{,}41 \qquad (21)$$

Свободные члены в системах (16) имеют порядок $O\left(\frac{1}{m^2}\right)$.

Таким образом, полученные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (16) квазивполне регулярны.

Значение амплитуды осевой силы в зависимости от координаты z определяется формулой

$$2\pi\int_0^R r\sigma_z(r,z)dr=-\frac{\pi R^2b^2}{2}\left[A_0\sin a(h-z)+B_0\cos a(h-z)\right]-$$

$$-\pi R\nu^{*}b^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\widetilde{H}_p\sin\lambda_p z}{\beta_p^2\lambda_p} \qquad (22)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. – Докл. АН Арм. ССР. 1954. т. 19. № 1. с. 3-12.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. 491с.
3. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наукова думка, 1978.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981.
5. Улитко А.Ф. Метод собственных вектор-функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1979.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
22.09.1995