ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

ОБ ОТДЕЛЕНИИ ПЛАНАРНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Мкртчян Л.Р.

Լ.Ռ. Մկրտչյան

Բարակ պիեզոէլեկտրիկ սալերի պլանար և ընդլայնական տատանումների անջատման մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են ընդլայնորեն բևեռացված 6mm դասի բարակ պիեզոէլեկտրիկ սալերի ազատ և հարկադրական տատանումները. Սալերի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի համար ընդունված է դասական տեսությունը: Ի տարբերություն հայտնի հետազոտությունների, էլեկտրական դաշտի համար ոչ մի հիպոթեզ չի դրվում: Ընդունված է միայն, որ էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը կարելի է ներկայացնել ընդլայնական կոորդինատի նկատմամբ սիմետրիկ և հակասիմետրիկ ֆունկցիաների գումարի տեսքով: Ցույց է տրված, որ որոշակի էլեկտրական եզրային պայմանների դեպքում պլանար տատանումները, որոնց մեջ մասնակցում է էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի հակասիմետրիկ մասը, անջատվում են ընդլայնական տատանումներից, որոնց մեջ մասնակցում է նաև էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի սիմետրիկ մասը: Բերված է ստացված արդյունքների թվային համեմատությունը:

L.R.Mktrchian

On separation of transverse and planar vibrations of piezoelectric plates

В работе рассматриваются свободные и вынужденные колебания поперечно-поляризованных тонких пьезоэлектрических пластин класса 6mm. Относительно напряженно-деформированного состояния пластин принимается классическая теория. В отличие от известных исследований, на потенциал электрического поля гипотезы не налагаются, кроме того, что потенциал поля можно представить в виде суммы симметричных и антисимметричных относительно поперечной координаты, функций. Показывается, что при определенных электрических граничных условиях планарные колебания (колебания обобщенного плоского состояния) с антисимметричной частью потенциала электрического поля отделяются от поперечных колебаний с симметричной частью потенциала поля. Приводится численное сравнение полученных результатов.

1. Пусть тонкая поперечно-поляризованная пьезоэлектрическая прямоугольная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к системе прямоугольных декартовых координат так, чтобы плоскость (XOY) совпадала со срединной плоскостью пластинки.

Упрощенные материальные соотношения, в которых согласно классической теории пластин пренебрегаются нормальное напряжение σ_{33} и поперечные сдвиговые напряжения σ_{31}, σ_{32}, возьмем в виде:

$$
\begin{aligned}
&e_{11} = s_{11}\sigma_{11} + s_{12}\sigma_{22} + d_{31}E_3, \quad e_{33} = 0, \quad e_{31} = e_{32} = 0 \\
&e_{22} = s_{12}\sigma_{11} + s_{11}\sigma_{22} + d_{31}E_3; \quad e_{12} = 2(s_{11} - s_{12})\sigma_{12} \qquad (1.1) \\
&D_1 = \varepsilon_1 E_1; \qquad D_2 = \varepsilon_1 E_2; \qquad D_3 = \varepsilon_3 E_3 + d_{31}(\sigma_{11} + \sigma_{22})
\end{aligned}
$$

Здесь D_i – компоненты вектора электрической индукции, а E_j – компоненты напряженности поля, для которых имеем

$$E_j = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

Тогда, на основе гипотезы Кирхгофа из (1.1) можно найти напряжения в пластинке по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + d_{31}(1+\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + d_{31}(1+\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) \tag{1.2}$$

а также компоненты вектора электрической индукции

$$D_3 = \frac{d_{31}E}{1-\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - z\Delta w\right) - \left(\varepsilon_3 - \frac{2Ed_{31}^2}{1-\nu}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$D_1 = -\varepsilon_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad D_2 = -\varepsilon_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Здесь u, v, w – перемещения срединной плоскости пластинки. Из условий статической эквивалентности, вместо напряжений удобно ввести внутренние силы и моменты, отнесенные к единице длины срединной плоскости пластинки.

$$T_1 = C\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + A(\varphi_+ - \varphi_-); \quad T_2 = C\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A(\varphi_+ - \varphi_-)$$

$$S = \frac{1-\nu}{2}C\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad H = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1.3}$$

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + hA\left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\varphi dz\right)$$

$$M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + hA\left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\varphi dz\right)$$

где введены следующие обозначения:

$$C = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \qquad A = \frac{d_{31}E}{1-\nu}, \qquad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

а φ_+ и φ_- – значения электростатического потенциала на лицевых плоскостях пластинки $z = \pm h$.

Рассмотрим следующие поверхностные условия:

$$\sigma_{33} = 0, \qquad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \tag{1.4}$$

а) $\varphi = \varphi^{(e)}$, $\quad D_3 = D_3^{(e)}$

а также другие варианты электрических поверхностных условий:

б) $\varphi = 0$, в) $D_3 = 0$ и их сочетания на лицевых плоскостях $z = \pm h$.

Осредним уравнения движения пластинки. Тогда получим выражения перерезывающих сил, а также уравнения колебаний пластинки относительно перемещений срединной плоскости и потенциала электрического поля.

$$N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + hA\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\varphi dz\right)$$

$$N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + hA\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\varphi dz\right) \tag{1.5}$$

$$\Delta u + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \text{v}}{\partial y}\right) + \frac{d_{31}(1+\nu)}{h}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Delta \text{v} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \text{v}}{\partial y}\right) + \frac{d_{31}(1+\nu)}{h}\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial t^2}$$

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - hA\Delta\left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\varphi dz\right) = 0 \tag{1.6}$$

К этим уравнениям движения дополняется уравнение электростатики, которое возьмем в трехмерном виде

$$\varepsilon_1\Delta\varphi + B\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + A\Delta w = 0 \tag{1.7}$$

Здесь $B = \varepsilon_3 - 2d_{31}A > 0$ (так как ε_3 по порядку больше, чем $d_{31}A$). Из системы (1.6) видно,что если на лицевых плоскостях пластинки заданы постоянные значения потенциала электрического поля φ_+ и φ_-, тогда планарные колебания (колебания обобщенного плоского напряженного состояния) отделяются от поперечных колебаний.

Выразим перемещения срединной плоскости u и v через две функции Φ и Ψ.

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad \text{v} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Тогда, после некоторых преобразований система (1.6) преобразуется к следующему виду:

$$c_t^2\Delta\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0; \quad c_l^2\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \chi_1(\varphi_+ - \varphi_-) = 0 \tag{1.8}$$

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{hA}{\varepsilon_1}\left\{\Delta\left[\varepsilon_2(\varphi_+ + \varphi_-) + 2Aw\right] + \frac{B}{h}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_+ - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_-\right]\right\} = 0$$

Здесь, как обычно, $\chi_1 = \frac{d_{31}E}{2\rho h}$ – коэффициент электромеханической связи, а $c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$, $c_l^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$

Функции Φ и Ψ в системе(1.8) отделяются, но они связаны электрическими поверхностными условиями. И задачи планарных и поперечных колебаний взаимосвязаны.

Пусть потенциал электрического поля таков, что его можно представить в виде суммы симметричных и антисимметричных относительно поперечной координаты, функций $\varphi = \varphi_c + \varphi_a$,

где $\varphi_c(x,y,h) = \varphi_c(x,y,-h)$, $\varphi_a(x,y,h) = -\varphi_a(x,y,-h)$

Тогда система (1.6), а также уравнение электростатики (1.7) распадаются на две самостоятельные системы

$$\begin{cases} c_t^2 \Delta\Psi - \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \\ c_t^2 \Delta\Phi - \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\chi_1 \varphi_a = 0 \\ B\dfrac{\partial^2 \varphi_a}{\partial z^2} + \varepsilon_1 \Delta\varphi_a = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} D\Delta^2 w + 2\rho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{2hA}{\varepsilon_1}\left\{\Delta(\varepsilon_1 \varphi_c + Aw) + \dfrac{B}{h}\left(\dfrac{\partial \varphi_c}{\partial z}\right)_*\right\} = 0 \\ B\dfrac{\partial^2 \varphi_c}{\partial z^2} + \Delta(\varepsilon_1 \varphi_c + Aw) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Из приведенных уравнений видно, что уравнения планарных колебаний, в которых участвует также антисимметричная часть потенциала электрического поля в общем случае отделяются от уравнений поперечных колебаний с симметричной частью электростатического потенциала.

Будем искать решения системы (1.9) и (1.10) в виде гармонических волн

$$\Psi = \Psi_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad \Phi = \Phi_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \tag{1.11}$$

$$w = w_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad \varphi = f(z) \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

В этом случае первое уравнение системы (1.9) приводит к сдвиговой волне (SV)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_t^2, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \tag{1.12}$$

Рассмотрим следующие электрические поверхностные условия

$$\varphi = \varphi^{(e)}, \quad D = D_3^{(e)} \quad \text{при} \quad z = \pm h \tag{1.13}$$

где символом (е) обозначена внешняя среда. Примем, что

$$\varphi^{(e)} = \varphi_1^{(e)} + \varphi_2^{(e)}$$

где $\varphi_1^{(e)}$ и $\varphi_2^{(e)}$ – потенциалы электрического поля для внешней среды, которые соответствуют симметричной и антисимметричной частям потенциала поля соответственно. Тогда выбранные электрические поверхностные условия (1.13) имеют вид

$$\begin{gathered} -B\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)_{z=h} + A\Delta\Phi = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_2^{(e)}}{\partial z}\right)_{z=h} + \left(\frac{\partial \varphi_2^{(e)}}{\partial z}\right)_{z=-h}\right] \\ -B\left(\frac{\partial \varphi_c}{\partial z}\right)_{z=h} - Ah\Delta w = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1^{(e)}}{\partial z}\right)_{z=h} - \left(\frac{\partial \varphi_1^{(e)}}{\partial z}\right)_{z=-h}\right] \\ \varphi_c = \varphi_1^{(e)}, \quad \varphi_a = \varphi_2^{(e)} \qquad \text{при} \quad z = \pm h \end{gathered} \tag{1.14}$$

К уравнениям (1.9) и (1.10) и к граничным условиям (1.14) присоединяются также уравнения внешней среды

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(e)}}{\partial z^2} + \Delta\varphi_1^{(e)} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \varphi_2^{(e)}}{\partial z^2} + \Delta\varphi_2^{(e)} = 0$$

Итак, при рассматриваемых электрических поверхностных условиях уравнения и граничные условия разделяются и приводят к самостоятельным системам относительно функций $\Phi, \varphi_a, \varphi_2^{(e)}$ и

w, φ_c, $\varphi_1^{(e)}$ соответственно. Первая система описывает колебания с частотой

$$\omega^2 = \frac{\left(2Ak^2\chi_1 - k^2c_l^2\varepsilon_0\right)\text{th}\chi kh + k^2c_l^2B\chi}{B\chi - \varepsilon_0\text{th}\chi kh}$$

а вторая - с частотой

$$\omega^2 = \frac{\left[Dk^4B\chi + \frac{2A^2k}{\chi}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - kh\right)\right]\text{th}\chi kh - \left[Dk^4\varepsilon_0 + \varepsilon A^2k^2h\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - kh\right]}{2\rho h\left(B\chi\text{th}\chi kh - \varepsilon_0\right)}$$

где $\chi^2 = \dfrac{\varepsilon_1}{B}$

При электрических граничных условиях б), т.е. когда лицевые поверхности пластинки электродированы и заземлены, имеем

$\varphi_c = 0, \quad \varphi_a = 0 \qquad$ при $\qquad z = \pm h$

В этом случае из системы (1.9) отделяется также уравнение, приводящее к продольной волне (PV)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_l^2 \tag{1.15}$$

т.е., планарные колебания отделяются от поперечных колебании и не зависят от пьезоэффекта, а поперечные колебания происходят с частотой

$$\omega^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h} + \frac{kA}{\rho h\varepsilon_1\chi}\left(\chi kh - \text{th}\chi kh\right) \tag{1.16}$$

А для электрического поля внутри пластинки имеем

$$f = \frac{A}{\varepsilon_1}\left(\frac{\text{ch}\chi kz}{\text{ch}\chi kh} - 1\right)w_0$$

Разлагая в уравнении (1.16) функцию $\text{th}\chi kh$ в ряд по степеням χkh (т.к. $\chi kh << 1$) и сохраняя первые три члена этого ряда, получим:

$$\omega^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h}\left[1 + \frac{(1+\nu)\chi_0}{1-2\chi_0}\right], \text{ где } \qquad \chi_0 = \frac{d_{31}^2E}{\varepsilon_3(1-\nu)} \tag{1.17}$$

Согласно (1.17) частота поперечных колебаний при $\chi_0 < \dfrac{1}{2}$ увеличивается, а при $\chi_0 > \dfrac{1}{2}$ - уменьшается. При $\chi_0 = \dfrac{1}{2}$ получим $\omega^2 \to \infty$. Однако вычисления для различных материалов показывают, что параметр χ_0 для реальных пьезоэлектриков $<< \dfrac{1}{2}$. Например,

материал	PZT-4	CdS	$BaTiO_3$	ЦТС-4	ЦТС-19	ТБК-3
χ_0	$1.41\cdot10^{-3}$	$0.2\cdot10^{-4}$	$0.08\cdot10^{-5}$	$1.16\cdot10^{-2}$	$6.3\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-3}$

В случае, когда лицевые поверхности пластинки неэлектродированы и $D_3 = 0$, планарные и поперечные колебания отделяются и происходят с частотами

$$\omega^2 = \frac{2\chi_1 kA\,\mathrm{th}\chi kh}{\chi B} + c_t^2 k^2, \quad \omega^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h} - \frac{k^2 A^2}{\rho\varepsilon_1}(\chi kh\,\mathrm{cth}\chi kh - 1)$$

в) Когда следующие поверхностные условия заданы на лицевых плоскостях пластинки

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \qquad D_3 = 0 \quad \text{при} \quad z = -h$$

планарные и поперечные колебания взаимосвязаны и частота колебаний определяется из биквадратного уравнения [1].

2 Рассмотрим вынужденные колебания пластинки-полосы. Пластинка колеблется под действием переменной во времени электрической нагрузки, заданной на лицевых плоскостях пластинки. Рассматриваются два случая электрических поверхностых условий

$$\text{а)}\ \varphi_+ = \varphi_0 \exp(i\omega t)\sin(\pi x/a), \qquad \varphi_- = \varphi_0 \exp(i\omega t)\sin(\pi x/a)$$

$$\text{б)}\ \varphi_\pm = \varphi_0 \exp(i\omega t)\sin(\pi x/a) \tag{2.1}$$

Пусть на торцевых плоскостях пластинки-полосы $x = 0,\ a$ заданы следующие граничные условия:

$$T_1 = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0, \quad \varphi = 0 \tag{2.2}$$

Из уравнений колебаний пластинки (1.6) и выбранных граничных условий следует, что в случае вынужденных колебаний также планарные и поперечные колебания отделяются друг от друга.

Решая задачу в случае электрических поверхностных условий а), получим резонансные планарные колебания

$$u = \frac{d_{31}(1-\nu^2)}{\pi\frac{h}{a}}\frac{1}{1-\omega^2/\omega_*^2}\exp(i\omega t)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

с резонансной частотой

$$\omega_* = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) совпадает со значением, полученным ранее в [2]. Но в отличие от этой работы, здесь планарные колебания влекут также поперечные колебания с частотой

$$\omega^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h} + \frac{(\pi/a)^2 A^2}{\rho\varepsilon_1}\left(1 - \alpha^{-1}\mathrm{th}\alpha\right) \tag{2.4}$$

которые не резонансные. Здесь $\alpha = \dfrac{\chi\pi h}{a}$.

Решая же задачу в случае электрических поверхностных условий б), получим резонансные поперечные колебания. В этом случае планарные колебания не зависят от пьезоэффекта и частота колебаний имеет вид (2.3). А для поперечных колебаний

$$\omega_0 = \frac{-2hA(\pi/a)^2\varphi_0\left(1-\alpha^{-1}\mathrm{th}\alpha\right)}{D(\pi/a)^4 - 2\rho h\omega^2 + 2A^2\varepsilon_1^{-1}h(\pi/a)^2\left(1-\alpha^{-1}\mathrm{th}\alpha\right)}$$

и резонансные частоты имеют вид (2.4).

Разлагая в формуле (2.4) функцию th в ряд по степеням α и ограничиваясь тремя членами ряда, получим, что во втором приближении ω_*^2/ω_0^2 (где $\omega_0^2 = Dk^4/2\rho h$) не зависит от толщины пластинки, а в третьем приближении

$$\frac{\omega_*^2}{\omega_0^2}=1+\frac{(1-\nu^2)A^2}{EB}-\frac{2(1-\nu^2)A^2\alpha^2}{5EB}$$

3. Рассмотрим вопрос разделяемости механических граничных условий на торцах пластинки. Возьмем различные механические граничные условия, например для края $x=0$.

1) Пусть край $x=0$ шарнирно оперт. Тогда, используя выражения внутренних сил и моментов (1.3), получим:

$$c\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2A\varphi_{a*}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad w=0$$

$$-D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+hA\left(2\varphi_{c*}-\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\varphi_c dz\right)=0$$

2) В случае, когда край свободен, имеем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2A\varphi_{a*}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+hA\left(2\varphi_{c*}-\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\varphi_c dz\right)=0$$

$$-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+hA\frac{\partial}{\partial x}\left(2\varphi_{c*}-\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\varphi_c dz\right)-(1-\nu)D\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0$$

3) В случае, когда край $x=0$ жестко заделан

$$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad u=0,\quad v=0$$

Как видно, в рассматриваемых граничных условиях уравнения для w, φ_c и u, v, φ_a разделяются.

4. Рассмотрим вынужденные колебания тонкой пьезоэлектрической пластинки-полосы, которая шарнирно оперта по краям $x=0,\alpha$. Колебания проходят под действием электрического потенциала φ, заданного на торцах пластинки.

Пусть заданы следующие электрические поверхностные условия

$\varphi_+=0$ при $z=h$ и $\varphi_-=0$ при $z=-h$ (4.1)

При выбранных поверхностных условиях (4.1) планарные колебания пластинки отделяются от поперечных колебаний и не зависят от пьезоэффекта.

Рассмотрим уравнения, описывающие поперечные колебания пластинки-полосы (1.10).

Выбранные граничные условия имеют вид:

а) $w=0,\ M_x=0,\ \varphi=V_0\sin\omega t$ при $x=0,a$ (4.2)

Решив поставленную граничную задачу для потенциала поля и перемещений, плучим

$$\varphi_c=\left[V_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(z)\sin\frac{n\pi x}{a}\right]\sin\omega t,\quad w=\sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty}w_n\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$\Phi_n(z)=\left[\frac{A}{\varepsilon_1}w_n+2V_0\frac{(-1)^n-1}{\pi n}\right]\frac{\operatorname{ch}\frac{\chi n\pi}{a}z}{\operatorname{ch}\frac{\chi n\pi}{a}h}-\frac{A}{\varepsilon_1}w_n \tag{4.3}$$

$$w_n = 4Ah\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 V_0 \left(\frac{\operatorname{th}\frac{\chi n\pi h}{a}}{\frac{\chi n\pi h}{a}} - 1\right)\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \times$$

$$\times\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^4 - 2\rho h\omega^2 - 2hA^2\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\operatorname{th}\frac{\chi n\pi h}{a}}{\frac{\chi n\pi h}{a}} - 1\right)\right]^{-1}$$

Отсюда можем получить резонансные частоты поперечных колебаний:

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi nh}{a}\right)^2 - \frac{d_{31}^2 E(1+\nu)}{\varepsilon_1(1-\nu)}\left(\frac{\operatorname{th}\frac{\chi n\pi h}{a}}{\frac{\chi n\pi h}{a}} - 1\right)\right]$$

при $n = 1,3,5,\ldots$

$$\omega_n^2 = 0 \qquad \text{при} \qquad n = 2,4,6,\ldots \tag{4.4}$$

Рассмотрим другие варианты электрических граничных условий:

б) Пусть $\varphi_c = V_0 \sin\omega t$ при $x = 0$

$$\varphi_c = -V_0 \sin\omega t \qquad \text{при} \qquad x = a \tag{4.5}$$

В этом случае для резонансных частот колебаний получаем:

$$\omega_n^2 = 0 \qquad \text{при} \qquad n = 1,3,5,\ldots \tag{4.6}$$

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi nh}{a}\right)^2 - \frac{d_{31}^2 E(1+\nu)}{\varepsilon_1(1-\nu)}\left(\frac{\operatorname{th}\frac{\chi n\pi h}{a}}{\frac{\chi n\pi h}{a}} - 1\right)\right]$$

$$\text{при} \qquad n = 2,4,6,\ldots \tag{4.7}$$

в) Пусть $\varphi_c = V_0 \sin\omega t$ при $x = 0$

$$\varphi_c = 0 \qquad \text{при} \qquad x = a \tag{4.8}$$

При этих граничных условиях для резонансных частот получаем то же выражение (4.7), только для всех натуральных n.

Сравним полученные резонансные частоты колебаний пластинки с резонансными частотами задачи, рассмотренной в [1]. В указанной работе рассматривались вынужденные колебания шарнирно-опертой пьезоэлектрической пластинки-полосы, когда на лицевых плоскостях заданы $\varphi_* = \pm e^{i\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{0n}(z)\sin\frac{n\pi x}{a}$

а на торцах пластинки потенциал поля равен нулю.

Для рассматриваемой задачи резонансные частоты планарных колебаний имеют вид:

$$\omega_{*n}^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \tag{4.9}$$

а поперечные колебания не резонансные.

Вычислим $\Psi = \omega_n^2/\omega_{*n}^2$ для пластинки-полосы, изготовленной из пьезокерамики PZT-4 при различных значениях относительной толщины h/a и для различных вариантов электрических граничных условий

Исходные параметры пьезокерамики *PZT*-4 следующие:

$\varepsilon_{11}^{T} = 1475, \ \varepsilon_{33}^{T} = 1300, \ d_{31} = -123\cdot10^{-8}, \ d_{15} = 496\cdot10^{-8}$

$d_{33} = 289\cdot10^{-8} \ \ [d_{ij} - г^{0.5} см^{0.5} с], \ S_{11}^{E} = 12.3\cdot10^{-13}$

$S_{33}^{E} = 15.5\cdot10^{-13}, \ S_{12}^{E} = -4.05\cdot10^{-13}, \ S_{13}^{E} = -5.31\cdot10^{-13}$

$S_{44}^{E} = 39.0\cdot10^{-13}, [S_{ik}^{E} - см^2 дин^{-1}], \ \ \rho = 7.5 \text{ г см}^{-3}$

Таблица 1

$n \backslash h/a$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
1	$3.3\cdot10^{-4}$	$1.318\cdot10^{-3}$	$2.966\cdot10^{-3}$	$5.273\cdot10^{-3}$	$8.239\cdot10^{-3}$
3	$2.966\cdot10^{-3}$	$1.186\cdot10^{-2}$	$2.669\cdot10^{-2}$	$4.745\cdot10^{-2}$	$7.414\cdot10^{-2}$
5	$8.239\cdot10^{-3}$	$3.295\cdot10^{-2}$	$7.414\cdot10^{-2}$	$1.318\cdot10^{-1}$	$2.059\cdot10^{-1}$
7	$1.615\cdot10^{-2}$	$6.458\cdot10^{-2}$	$1.453\cdot10^{-1}$	$2.583\cdot10^{-1}$	$4.035\cdot10^{-1}$
9	$2.669\cdot10^{-2}$	$1.067\cdot10^{-1}$	$2.401\cdot10^{-1}$	$4.268\cdot10^{-1}$	$6.668\cdot10^{-1}$

Таблица 2

$n \backslash h/a$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
2	$1.318\cdot10^{-3}$	$5.273\cdot10^{-3}$	$1.186\cdot10^{-2}$	$2.109\cdot10^{-2}$	$3.295\cdot10^{-2}$
4	$5.273\cdot10^{-3}$	$2.109\cdot10^{-2}$	$4.745\cdot10^{-2}$	$8.435\cdot10^{-2}$	$1.317\cdot10^{-1}$
6	$1.186\cdot10^{-2}$	$4.745\cdot10^{-2}$	$1.067\cdot10^{-1}$	$1.897\cdot10^{-1}$	$2.964\cdot10^{-1}$
8	$2.109\cdot10^{-2}$	$8.435\cdot10^{-2}$	$1.897\cdot10^{-1}$	$3.372\cdot10^{-1}$	$5.269\cdot10^{-1}$
10	$3.295\cdot10^{-2}$	$1.317\cdot10^{-1}$	$2.964\cdot10^{-1}$	$5.269\cdot10^{-1}$	$8.231\cdot10^{-1}$

В табл. 1, 2. приведены численные результаты отношения Ψ резонансных частот указанных задач в случае электрических граничных условий соответственно а) и б) для $n = 1,\ldots,10$ и $h/a = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$. В первом случае $\Psi = 0$ при четных n, а во втором случае $\Psi = 0$ при нечетных n.

В случае электрических граничных условий в) отношение Ψ принимает значения обеих таблиц (для всех $n = 1,\ldots,10$).

Численные результаты показывают, что с возрастанием n значения резонансных частот обеих задач сближаются.

Для очень тонких пластин $(h/a = 0.01)$ резонансные частоты поперечных колебаний на два порядка меньше, чем соответствующие резонансные частоты планарных колебаний. Для остальных случаев относительной толщины h/a на порядок меньше. С увеличением относительной толщины пластинки значения рзонансных частот обеих задач сближаются.

Сравним значения резонансных частот поперечных колебаний задачи, когда на лицевых плоскостях пластинки заданы условия

$$\varphi_{+} = \varphi_0 e^{i\omega t} \sin\frac{\pi x}{a} \qquad \varphi_{-} = -\varphi_0 e^{i\omega t} \sin\frac{\pi x}{a}$$

для потенциала электрического поля и рассматриваемой задачи, когда пластинка колеблется под действием потенциала поля, заданного на торцевых плоскостях.

В случае граничных условий (4.2) эти значения совпадают при нечетных n. (При четных значениях n в рассматриваемой задаче).

В случае граничных условий (4.5) эти значения совпадают при нечетных значениях n. В случае же условий (4.8) резонансные частоты обеих рассматриваемых задач совпадают при всех значениях n.

Рассмотренные в работе свободные и вынужденные колебания пластинки приводят к следующим выводам.

Если потенциал электрического поля внутри пластинки таков, что его можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной относительно поперечной координаты функций, то уравнение планарных колебаний, где участвует также антисимметричная часть потенциала поля, отделяется от уравнений поперечных колебаний, в которых участвует симметричная часть потенциала поля. Но эти колебания связаны граничными условиями. Показано, что при соответствующем выборе электрических поверхностных условий упомянутые задачи отделяются друг от друга. Отделяются также рассмотренные механические условия на торцах пластинки.

Рассмотрены задачи вынужденных колебаний пластинки, когда на лицевых плоскостях заданы периодически изменяемые во времени потенциалы электрического поля. В случае чисто планарных колебаний полученные резонансные частоты совпадают с ранее известными [2]. Но в отличие от работы [2], здесь планарные колебания влекут также поперечные колебания, которые не резонансные. Показано, что при определенных электрических поверхностных условиях возможны чисто поперечные резонансные колебания. Исследовано взаимодействие планарных и поперечных колебаний в общем случае.

Рассмотрена задача вынужденных поперечных колебаний пластинки под действием различных электрических нагрузок, заданных на торцевых плоскостях. Полученные резонансные частоты сравниваются с резонансными частотами планарных и поперечных колебаний, когда пластинка колеблется под действием электрической нагрузки, заданной на лицевых плоскостях (для пьезокерамики PZT-4). Численные результаты показывают, для очень тонких пластин $(h/a = 0.01)$ резонансные частоты поперечных колебаний (в задаче колебаний под действием торцевой нагрузки) на два порядка меньше, чем соответствующие резонансные частоты планарных колебаний (в задаче колебаний под действием заданной на поверхности нагрузки). Для остальных случаев рассмотренной относительной толщины $(h/a = 0.02,\dots 0.05)$ эти частоты отличаются на порядок. С возрастанием n значения резонансных частот обеих задач сближаются.

Автор выражает благодарность профессору М.В.Белубекяну за постановку задачи и ценные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belubekian M.V., Mkrtchian L.R. Vibrations of transversely polarized thin piezoelectric plates // Proceed of the Int. Conf. on "Smart Structures and Materials-95". San Diego, California, 1995. Editor. A. Peter Jardine. SPIE. Vol. 2441. p. 233-242.
2. Гринченко В.Т., Карлаш В.М., Мелешко В.В., Улитко А.Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. мех. 1976, т.13, №5, с. 71-79.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 13.05.1996