ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

О СУЩЕСТВОВАНИИ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В СЛАБО-НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СЛОЕМ

Мухсихачоян А.Р.

Ա.Ռ.Մուխսիխաչոյան
Շերտով թույլ անհամասեռ կիսատարածությունում սահքի մակերևութային ալիքի գոյության մասին

[illegible]

[illegible]

A.R. Mukhsikhachoyan
On existance of a shear surface wave in weak-nonhomogeneous semi-spase with layer

Исследована задача, в которой рассматривается однородный слой со слабо-неоднородной подложкой с точки зрения существования модифицированной волны Лява в зависимости от медленно изменяющихся упругих характеристик неоднородной среды. Для разных диапазонов фазовой скорости получены дисперсионные уравнения и условия существования сдвиговой поверхностной волны (СПВ). Для периодически неоднородной среды с тонким слоем приведены дисперсионные кривые.

Показано, что неоднородность среды играет роль как бы своего рода "фильтра" для существования той или иной длины СПВ.

Помимо основных типов поверхностных волн, в настоящее время предложен и изучен ряд обобщений и новых разновидностей поверхностных волн. Интересным новым обобщением волны Лява являются сдвиговые поверхностные волны (СПВ) в полупространстве с небольшой поверхностной неоднородностью, рассмотренные в работах [3-5]. В книге [2] изложена как теория рассеяния поверхностных акустических волн на приповерхностных неоднородностях, так и распространение этих волн в слоистых средах, на поверхностях переменной крутизны и т. д.

1. Представляет интерес задача, в которой рассматривается однородный слой (μ_1, ρ_1) со слабо-неоднородной подложкой $(\mu_2(x_2), \rho_2(x_2))$ с точки зрения существования модифицированной волны Лява в зависимости от переменных упругих характеристик. Слабая неоднородность среды заключается в том, что считаются медленно изменяющимися не только упругие характеристики рассматриваемой среды, но и амплитуда искомой волны, вследствие чего пренебрегаются второе производное амплитуды, а также произведения производных от амплитуд и от упругих характеристик. Выберем координатную систему таким образом, чтобы ось OX_2 была направлена в глубь подложки, а OX_1 – по направлению распространения волны.

Слой занимает область $\left(-h < x_2 < 0\right)$, а подложка – $\left(x_2 > 0\right)$. Пусть поле перемещений СПВ имеет вид: $U\left\{0;0;W_i\left(x_1,x_2,t\right)\right\}$, $i = 1;2$.

Уравнение движения в слое и в подложке соответственно запишутся следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\Delta W_1 = c_1^{-2}\ddot{W}_1 \\
\frac{\partial^2 W_2}{\partial x_1^2} + \mu_2^{-1}\left(x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu_2\left(x_2\right)\frac{\partial W_2}{\partial x_2}\right] = c_2^{-2}\left(x_2\right)\ddot{W}_2
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $c_1 = \left(\mu_1/\rho_1\right)^{1/2}$ и $c_2 = \left[\mu_2(x_2)/\rho_2(x_2)\right]^{1/2}$ - скорости сдвиговых объемных волн соответственно в слое и в подложке.

Граничные условия на поверхности слоя $x_2 = -h$ и на поверхности раздела слой-подложка $x_2 = 0$ запишутся соответственно следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial W_1}{\partial x_2} = 0; \qquad x_2 = -h \\
\mu_1\frac{\partial W_1}{\partial x_2} = \mu_0\frac{\partial W_2}{\partial x_2}, \qquad W_1 = W_2, \qquad x_2 = 0
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где $\mu_0 = \mu_2(0)$. Решения уравнений (1.1) ищем в виде

$$
W_{1,2} = \varphi_{1,2}(x_2)\exp\left[i\left(kx_1 - \omega t\right)\right]
$$

Уравнения движения преобразуются к виду

$$
\frac{d^2\varphi_1}{dx_2^2} + k^2\alpha_1^2\varphi_1 = 0 \tag{1.3}
$$

$$
\mu_2^{-1}(x_2)\left[\mu_2(x_2)\varphi_2'(x_2)\right]' - k^2(1-\eta)\varphi_2(x_2) = 0 \tag{1.4}
$$

Таким образом, поле упругих перемещений СПВ в слою принимает вид

$$
W_1 = \left[B\sin\left(k\alpha_1 x_2\right) + D\cos\left(k\alpha_1 x_2\right)\right]\exp\left[i\left(kx_1 - \omega t\right)\right] \tag{1.5}
$$

Исходя из предположения, что среда подложки является слабо-неоднородной, ищем решение уравнения (1.4) по методу ВКБ [4]

$$
\varphi_2(x_2) = A(x_2)\exp\left[-k\int_0^{x_2}\sqrt{1-\eta(\xi)}\,d\xi\right] \tag{1.6}
$$

где считается, что $A(x_2)$ - слабо изменяющаяся по x_2 функция, т. е. пренебрежимы $A''(x_2)$, $\mu_2'(x_2)A'(x_2)$ и т. д. Удовлетворяя (1.6) уравнению (1.4) с точностью допущения слабо-изменяющихся функций и с учетом затухания волны на бесконечности

$$
0 < \eta(x_2) < 1 \tag{1.7}
$$

получим поле СПВ слабо-неоднородной подложки

$$
W_2 = A_0\exp\left[-k\int_0^{x_2}\sqrt{1-\eta(\xi)}\,d\xi\right]\frac{\exp\left[i\left(kx_1 - \omega t\right)\right]}{\mu_2^{1/2}(x_2)\left[1-\eta(x_2)\right]^{1/4}} \tag{1.8}
$$

Решения (1.5) и (1.8) удовлетворяют граничным условиям (1.2), в результате чего получим дисперсионное уравнение задачи

$$2kg\operatorname{tg}(kh\alpha_1) = \alpha_0^{-2}\alpha_1^{-1}\left[\mu_0'\mu_0^{-1}\alpha_0^2 + c_0'c_0^{-1}(1-\alpha_0^2) + 2k\alpha_0^3\right] \tag{1.9}$$

где

$$\alpha_0 = (1-\eta_0)^{1/2}, \ \ \alpha_1 = (\eta_1 - 1)^{1/2}, \ \ \eta_{0,1} = v^2/c_{0,1}^2, \quad c_0 = c_2(0), \quad g = \mu_1/\mu_0 \tag{1.10}$$

В уравнение (1.9) входят параметры среды и их первые производные только при $x_2 = 0$, т. е. фазовая скорость СПВ фактически не зависит от "формы" объемных неоднородностей. Это следствие как сильных требований на "слабость" неоднородностей, так и того, что искомая волна локализована вблизи поверхности $x_2 = 0$. Необходимо отметить, что при выводе решений (1.5), (1.8) и дисперсионного уравнения (1.9) предполагалось, что α_1 является реальной, тогда, когда α_0 может быть только реальной в силу затухания волны в подложке. При рассмотрении однородной подложки, дисперсионное уравнение (1.9) сводится к классическому уравнению Лява. Если толщина слоя намного меньше длины искомой волны, то среда допускает распространение СПВ с фазовой скоростью

$$\eta_0^* = v_0^2 c_0^{-2} = \mu_0'\mu_0^{-1}\left[\mu_0'\mu_0^{-1} - c_0'c_0^{-1}\right]^{-1} \tag{1.11}$$

которая с точностью совпадает со скоростью СПВ, распространяющейся в слабо-неоднородном полупространстве при $k \to 0$ [1]. Однако, должен удовлетворять условию (1.7), вследствие чего получим

$$c_0' < 0, \ \mu_0' > 0 \qquad \text{или} \qquad c_0' > 0, \ \mu_0' < 0 \tag{1.12}$$

Возможны три варианта взаимоположения постоянных величин c_0, c_1 и v_0 [6]. Рассмотрим первый вариант

$$v_0 < c_1 < c_0 \tag{1.13}$$

Здесь, как следует из (1.10), α_1 становится мнимой, а α_0 реальной. Допустим $\alpha_1 = i\beta_1$, где $\beta_1 = (1-\eta_1)^{1/2}$ является реальной. Тогда дисперсионное уравнение (1.9) преобразуется к виду

$$L(\eta_0) = 2Pg(1-\eta_0)(1-\eta_0\theta)^{1/2}\operatorname{th}\left[P(1-\eta_0\theta)^{1/2}\right] + \\ +2P(1-\eta_0)^{3/2} + \mu_0'\mu_0^{-1}(1-\eta_0) + hc_0'c_0^{-1}\eta_0 = 0 \tag{1.14}$$

где $\theta = c_0^2 c_1^{-2}$, $P = kh$.

Исходя из того, что функция $L(\eta_0)$, являющаяся монотонной, на краях области своего определения (1.7) принимает значения противоположных знаков, условия существования СПВ запишутся в виде:

а) Если $\mu_0' > 0$ и $c_0' < 0$, то могут распространяться СПВ любой длины.

б) Если $\mu_0' < 0$ и $c_0' \geq 0$, то могут распространяться СПВ длиною, удовлетворяющей неравенству

$$2P\left[1 + g\operatorname{th}P\right] < -h\mu_0'\mu_0^{-1} \tag{1.15}$$

в) Если $\mu_0' < 0$ и $c_0' < 0$, то могут распространяться СПВ длиною, удовлетворяющей неравенству

$$2P\left[1 + g\,\mathrm{th}P\right] > -h\mu_0'\mu_0^{-1} \tag{1.16}$$

Если не выполняется ни одно из перечисленных условий, то среда не допускает существования СПВ для первого варианта (1.13).

Сравнивая вышеполученные условия с условиями существования СПВ в слабо-неоднородном полупространстве, заметим, что за счет изменения длины волны класс допускаемых волн уменьшается в случае выполнения условий б) и, наоборот, увеличивается в случае в). При выполнении условий а) класс волн изменений не терпит. Однако, необходимо отметить, что к вышеперечисленным условиям а), б) и в) приходится присоединить условия, полученные от требования ограниченности функции $\mathrm{th}\left(P\beta_1\right)$. После несложных вычислений эти условия запишутся

$$P_1 < P < P_2 \tag{1.17}$$

где
$$P_1 = P_2\left[1 + g\left(1 - \eta_0\theta\right)^{1/2}\left(1 - \eta_0\right)^{-1/2}\right]^{-1}$$

$$P_2 = \left(-h/2\right)\left(1 - \eta_0\right)^{-3/2}\left[\left(1 - \eta_0\right)\mu_0'\mu_0^{-1} + c_0'c_0^{-1}\eta_0\right]$$

Тут нужно, чтобы P_2 было положительным, что, в свою очередь, приводит к усложнению уже имеющиеся условия (1.12), а именно: для каждой из условий а), б) и в) оно запишется соответственно в следующих формах:

$$\eta_0^* < \eta_0 < 1 \tag{1.18а}$$

$$0 < \eta_0 < \eta_0^* \tag{1.18б}$$

$$0 < \eta_0 < 1 \tag{1.18в}$$

2. Для наглядности рассмотрим конкретный пример слабо-неоднородной среды. Допустим плотность и модуль сдвига среды изменяются по следующим законам:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \varepsilon_1 \sin\left(\pi x_2/l\right)\right) \tag{2.1}$$

$$\mu = \mu_0\left(1 + \varepsilon_2 \sin\left(\pi x_2/l\right)\right) \tag{2.2}$$

с условием $0 < \varepsilon_{1,2} << 1$, где ρ_0, μ_0 - соответствующие значения ρ и μ на границе $x_2 = 0$, а l - период изменения неоднородности по глубине подложки. Для среды (2.1), (2.2) выполняемы условия существования волны а), если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Дисперсионное уравнение (1.14) в данном случае примет вид

$$\begin{aligned}&2Pg\left(1 - \eta_0\right)\left(1 - \eta_0\theta\right)^{1/2}\mathrm{th}\left[P\left(1 - \eta_0\theta\right)^{1/2}\right] + \\ &+2P\left(1 - \eta_0\right)^{3/2} + q\varepsilon_2\left(1 - d\eta_0\right) = 0\end{aligned} \tag{2.3}$$

здесь $q = \pi h/l$, $d = 3/2$.

При выводе (2.3) предполагалось, что $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$. Если толщина слоя намного меньше периода неоднородностей $(h << l)$, а это значит, что слой не "чувствует" неоднородности подложки, приходим к классической задаче Лява, которая при расположении скоростей (1.13) решений не имеет.

Предположение о тонкости слоя позволяет трансцендентное уравнение (2.3) привести к квадратному уравнению

$$2P^2 g(1-\eta_0)(1-\eta_0\theta)+2P(1-\eta_0)^{3/2}+q\varepsilon_2(1-d\eta_0)=0 \qquad (2.4)$$

Чтобы провести исследование дисперсионных кривых, задаваемых функциональной зависимостью $f(\eta_0, P)=0$ по (2.4), зададим значения некоторых постоянных в табл. 1 (А).

Кривая фазовой скорости, начиная со значения $\eta_0^* = 2/3$, монотонно возрастает и стремится к значению $\eta_\infty = \eta_0(P \to \infty)$, определенное по

$$2k(1-\eta_\infty)^{3/2}+\eta_\infty c_0' c_0^{-1}+\mu_0'\mu_0^{-1}(1-\eta_\infty)+2kg(1-\theta\eta_\infty)^{1/2}(1-\eta_\infty).$$

Переходим к исследованию неоднородной среды (2.1) с условием

$$-1 << \varepsilon_{1,2} < 0 \qquad (2.5)$$

В данном случае выполняются условия б), если $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$. Исследуем (2.4) с учетом (1.15), которое при длинноволновом приближении принимает вид

$$0 < P < P_0 \qquad (2.6)$$

где $P_0 = \left[\sqrt{1-2gq\varepsilon_2}-1\right](2g)^{-1}$

Из-за длинноволнового приближения $P_0 << 1$, следовательно,

$$g >> -\varepsilon_2(q/2)-1 \qquad (2.7)$$

Поскольку g должна быть положительной, получим

$$g > -2/\varepsilon_2 \qquad (2.8)$$

Постоянные g, θ, q и ε_2 зададим в табл. 1 (Б). В этом случае кривая фазовой скорости, начиная со значения $\eta_0^* = 2/3 \quad (P \to 0)$ и монотонно убывая, стремится к значению $P_0 \; (\eta_0 \to 0)$.

И, наконец, в последнем случае этого варианта рассмотрим неоднородную среду (2.1) с условиями

$$0 \leq \varepsilon_1 << 1, \quad -1 << \varepsilon_2 < 0 \qquad (2.9)$$

Нетрудно убедиться в том, что здесь выполняются условия в). Опять исследуется дисперсионное уравнение (2.4), где $d = 1/2$ (поскольку берется $\varepsilon_1 = 0$). Условие (1.16) упрощается, принимая вид $P > P_0$. Исходя из соображений, проведенных в предыдущем случае, получим условия (2.7) и (2.8). Дисперсионная кривая начинается со значения P_0 и монотонно возрастая, асимптотически стремится к значению η_α.

Переходим к рассмотрению второго варианта расположения скоростей

$$c_1 < v_0 < c_0 \qquad (2.10)$$

Так как в этом случае α_1 остается реальной, поэтому исследуется дисперсионное уравнение (1.9). Первая мода начинается со значения

(1.11) и с возрастанием P монотонно убывает, стремясь к нижнему пределу рассматриваемого диапазона скоростей c_1. В отличие от предыдущих вариантов, здесь имеем моды высших порядков. Они, отделяясь от верхней границы рассматриваемого диапазона скоростей, также монотонно убывают с возрастанием P.

В конце обсудим третий вариант расположения скоростей

$$v_0 < c_1 < c_0 \tag{2.11}$$

Настоящий вариант представляет из себя комбинацию двух вариантов – при $c_1 < v < c_0$ приходим ко второму варианту, а при $0 < v < c_1$ исследование уравнения (1.14) проводится аналогично исследованию, сделанному для первого варианта (1.13). Однако, условия существования волны здесь на P ставят новые ограничения:

А3) Если $\mu_0' > 0$ и $c_0' < 0$, то могут распространяться СПВ длиною

$$0 < P < P_3 \tag{2.12}$$

где $$P_3 = -\frac{h}{2}\left[c_0' c_0^{-1}\theta^{-1}\left(1-\theta^{-1}\right)^{-3/2} + \mu_0'\mu_0^{-1}\left(1-\theta^{-1}\right)^{-1/2}\right]$$

Учитывая условие (1.18а) и область определения в данном случае, получим

$$\eta_0^* < \eta_0 < \theta^{-1}, \quad 1 < \theta < 1/\eta_0^*$$

Б3) Если $\mu_0' < 0$ и $c_0' > 0$, то могут распространяться СПВ длиною

$$2P\left[1 + \mathrm{gth}P\right] > -\mu_0'\mu_0^{-1}h \qquad P > P_3 .$$

В3) Если $\mu_0' < 0$ и $c_0' < 0$, то могут распространяться СПВ длиною

$$2P\left[1 + \mathrm{gth}P\right] < -\mu_0'\mu_0^{-1}h \qquad 0 < P < P_3$$

Далее целесообразно исследования продолжать для определенной неоднородной среды. Пусть среда задана в виде (2.1), (2.2). Условия А3) выполняются при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Предполагая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ и учитывая табл. 1(В), получим численные ограничения для η_0, θ и P.

Таблица 1

0	А	Б	В	Г
g	1	1	1	1
θ	0.5	0.5	1.2	1.2
q	1	300	1	300
ε_2	0.01	-0.01	0.01	-0.01

В области $\theta^{-1} < \eta_0 < 1$ они имеют вид подобно моде высших порядков. Нулевая мода, начиная со значения $\eta_0^* = 2/3$, монотонно возрастает до конца области определения θ^{-1}, при которой $P = P_3$. Неоднородная среда (2.1), (2.5) допускает распространение СПВ, если $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$. С помощью табл. 1 (Г), предположения $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ и условий (2.6)-(2.8) получаем численные ограничения для η_0, P, q, g. Легко заметить, что нулевая мода изменений не терпит по сравнению с единственной модой. А в области $\theta^{-1} < \eta_0 < 1$ существуют моды высших порядков. Условия существования волны ВЗ) выполняются для среды (2.1), (2.7). Считая, что $\varepsilon_1 = 0$ и используя постоянные табл. 1 (Г), получим новые ограничения для P, η_0. Как видно, нулевая мода начинается со значения P_0 и монотонно возрастает до P_3.

При втором (2.10) и третьем (2.11) вариантах фазовая скорость принимает единственное значение только в том случае, если P меньше, чем то его значение, которое принимает вторая кривая при значении $c_0(\eta_0 = 1)$. Пусть $\eta_0 = 1$, тогда $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = (\theta - 1)^{1/2}$. Исходя из (1.9), необходимое условие запишется $P < (3/2)\pi(\theta - 1)^{-1/2}$. При первом варианте (1.13) все три исследованные среды допускали единственную моду фазовой скорости СПВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабо-неоднородных упругих средах. - Акуст. жур. 1995, т.41, №6, с. 3-8.
2. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. - М.: Наука, 1991. 415 с.
3. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - М.: Наука, 1981. 288 с.
4. F.A. Robinson, M.T. Silvia Digital Foundations of time Series Analysis. Vol. 2: Wave-Equation Space-Time Processing. San-Francisco, Holden-Day, Inc., 1981. p.534.
5. G.A. Maugin. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization//Advances In Applied Mechanics. V.23, p.373-434.
6. R.G. Curtis and M. Redwwood. Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness// J. Appl. Phys., 1973, Vol.44, №5.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 27.11.1995